



Departamento de Física  
Universidade de Coimbra

# **Ajuste de Convexidade LIBOR: o caso dos modelos de Vasicek e Cox-Ingersoll-Rox**

Bruno Filipe Lopes Gaminha

Setembro de 2009



Dissertação submetida à  
Universidade de Coimbra  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Física  
na Especialidade de Modelação e Simulação Computacional

# **Ajuste de Convexidade LIBOR: o caso dos modelos de Vasicek e Cox-Ingersoll-Rox**

Bruno Filipe Lopes Gaminha

Universidade de Coimbra  
Departamento de Física  
Setembro de 2009

Dissertação realizada sob a orientação de  
Prof. Doutor Orlando Olavo Aragão Aleixo e Neves Oliveira  
Prof. Auxiliar do Departamento de Física  
Universidade de Coimbra  
e  
Prof. Doutora Raquel Medeiros Gaspar  
Prof. Auxiliar do Departamento de Gestão do ISEG  
Universidade Técnica de Lisboa

*A recordação de uma determinada imagem não passa da  
nostalgia de um determinado momento.*

Marcel Proust

# **Agradecimentos**

À minha mãe, à Carolina e a todos os meus amigos e familiares.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Enquadramento teórico</b>	<b>3</b>
2.1	Definições e Notação . . . . .	4
2.1.1	Processos Estocásticos . . . . .	4
2.1.2	Martingala . . . . .	6
2.1.3	Obrigações e taxas de juro . . . . .	8
2.2	Modelos estocásticos para as short rate . . . . .	13
2.2.1	Modelos com estrutura temporal afim . . . . .	21
2.2.2	Modelo de Vasicek . . . . .	23
2.2.3	Modelo Cox, Ingersoll e Ross (CIR) . . . . .	26
2.3	Ajuste de convexidade . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Análise numérica</b>	<b>32</b>
3.1	O modelo de Vasicek . . . . .	32
3.1.1	Sensibilidade da taxa de juro instantânea relativamente aos diferentes parâmetros . . . . .	32
3.1.2	Sensibilidade do preço da obrigação de cupão zero relativamente aos diferentes parâmetros . . . . .	41

3.1.3	Sensibilidade da taxa LIBOR relativamente aos diferentes parâmetros do modelo . . . . .	45
3.1.4	Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente aos diferentes parâmetros do modelo . . . . .	49
3.2	O modelo de CIR . . . . .	57
3.2.1	Sensibilidade da taxa de juro instantânea relativamente aos diferentes parâmetros . . . . .	58
3.2.2	Sensibilidade do preço da obrigação de cupão zero relativamente aos diferentes parâmetros . . . . .	69
3.2.3	Sensibilidade da taxa LIBOR relativamente aos diferentes parâmetros do modelo . . . . .	72
3.2.4	Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente aos diferentes parâmetros do modelo . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Conclusões</b>	<b>89</b>
4.1	Taxa de juro instantânea . . . . .	89
4.2	Obrigações de cupão zero . . . . .	90
4.3	Taxa LIBOR . . . . .	90
4.4	Ajuste de convexidade da taxa LIBOR . . . . .	91

# Lista de Figuras

3.1	Sensibilidade do modelo de Vasicek relativamente ao parâmetro $k$ (variância) . . . . .	36
3.2	Sensibilidade do modelo de Vasicek relativamente ao parâmetro $k$ (valor esperado) . . . . .	37
3.3	Sensibilidade do modelo de Vasicek relativamente ao parâmetro $\theta$ . . . . .	38
3.4	Sensibilidade do modelo de Vasicek relativamente ao parâmetro $\sigma$ . . . . .	40
3.5	Sensibilidade do preço das obrigações de cupão zero relativamente ao parâmetro $k$ para $\sigma$ grande . . . . .	42
3.6	Sensibilidade do preço das obrigações de cupão zero relativamente ao parâmetro $k$ para $\sigma$ pequeno . . . . .	43
3.7	Sensibilidade do preço das obrigações de cupão zero relativamente ao parâmetro $\theta$ . . . . .	44
3.8	Sensibilidade do preço das obrigações de cupão zero relativamente ao parâmetro $\sigma$ . . . . .	45
3.9	Sensibilidade do valor da taxa LIBOR relativamente ao parâmetro $k$ para $\sigma$ grande . . . . .	46
3.10	Sensibilidade do do valor da taxa LIBOR relativamente ao parâmetro $k$ para $\sigma$ pequeno . . . . .	47
3.11	Sensibilidade do valor da taxa LIBOR relativamente ao parâmetro $\theta$ . . . . .	48
3.12	Sensibilidade do valor da taxa LIBOR relativamente ao parâmetro $\sigma$ . . . . .	49

3.13	Sensibilidade da função $F(t, T, U, S)$ relativamente ao parâmetro $k$ . . . .	52
3.14	Sensibilidade da função $F(t, T, U, S)$ relativamente ao parâmetro $\sigma$ . . . .	53
3.15	Sensibilidade da função $F(t, T, U, S)$ relativamente à diferença $S_T$ . . . .	54
3.16	Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente ao parâmetro $\theta$ . . . .	55
3.17	Sensibilidade do peso relativo de ajuste de convexidade relativamente ao parâmetro $\theta$ . . . . .	56
3.18	Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente ao parâmetro $k$ . . . .	57
3.19	Sensibilidade do peso relativo de ajuste de convexidade relativamente ao parâmetro $k$ . . . . .	58
3.20	Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente ao parâmetro $\sigma$ . . . .	59
3.21	Sensibilidade do peso relativo de ajuste de convexidade relativamente ao parâmetro $\sigma$ . . . . .	60
3.22	Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente à diferença $S - T$ . . . .	61
3.23	Sensibilidade do peso relativo de ajuste de convexidade relativamente à diferença $S - T$ . . . . .	62
3.24	Sensibilidade do modelo de CIR relativamente ao parâmetro $k$ . . . . .	64
3.25	Sensibilidade do modelo de CIR relativamente ao parâmetro $k$ . . . . .	65
3.26	Valor esperado e variância no modelo de CIR . . . . .	66
3.27	Sensibilidade do modelo de CIR relativamente ao parâmetro $\theta$ . . . . .	67
3.28	Sensibilidade do modelo de CIR relativamente ao parâmetro $\theta$ . . . . .	68
3.29	Sensibilidade do modelo de CIR relativamente ao parâmetro $\sigma$ . . . .	69
3.30	Sensibilidade do preço das obrigações de cupão zero relativamente ao parâmetro $k$ . . . . .	70
3.31	Sensibilidade do preço das obrigações de cupão zero relativamente ao parâmetro $\theta$ . . . . .	71

3.32	Sensibilidade do preço das obrigações de cupão zero relativamente ao parâmetro $\sigma$ . . . . .	72
3.33	Sensibilidade do valor da taxa LIBOR relativamente ao parâmetro $k$ . . . .	73
3.34	Sensibilidade do valor da taxa LIBOR relativamente ao parâmetro $\sigma$ . . . .	74
3.35	Sensibilidade da função $F(t, T, U, S)$ relativamente ao parâmetro $\theta$ . . . .	77
3.36	Sensibilidade da função $F(t, T, U, S)$ relativamente ao parâmetro $\sigma$ . . . .	78
3.37	Sensibilidade da função $F(t, T, U, S)$ relativamente ao parâmetro $k$ . . . .	79
3.38	Sensibilidade da função $F(t, T, U, S)$ relativamente à diferença $S_T$ . . . .	80
3.39	Sensibilidade da função $G(t, T, U, S)$ relativamente ao parâmetro $\sigma$ . . . .	81
3.40	Sensibilidade da função $G(t, T, U, S)$ relativamente ao parâmetro $k$ . . . .	82
3.41	Sensibilidade da função $G(t, T, U, S)$ relativamente à diferença $S_T$ . . . .	83
3.42	Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente a $\theta$ com $\sigma = 0.15$ . . .	84
3.43	Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente a $\theta$ com $\sigma = 0.10$ . . .	84
3.44	Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente a $k$ . . . . .	85
3.45	Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente a $k$ muito pequenos . . .	85
3.46	Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente a $\sigma$ . . . . .	86
3.47	Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente a $\sigma$ com diferentes valores de $k$ . . . . .	86
3.48	Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente à diferença $S - T$ para $\sigma = 0.10$ . . . . .	87
3.49	Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente à diferença $S - T$ para $\sigma = 0.15$ . . . . .	87
3.50	Influência na correcção do ajuste de convexidade . . . . .	88

# Capítulo 1

## Introdução

Ao longo dos séculos XX e XXI, o mercado de dívida foi assumindo um papel central no desenvolvimento económico das sociedades capitalistas modernas. Este mercado é dotado de uma complexidade, competitividade e dinamismo que fazem com que qualquer vantagem competitiva, entre os diferentes actores intervenientes, assuma uma importância fundamental.

Muitos dos produtos transaccionados nos mercados de dívida são, de uma forma ou de outra, não normalizados, originando dificuldades na obtenção do seu valor. A complexidade de alguns destes produtos leva a que não seja possível obter fórmulas fechadas para a sua valorização. Um dos procedimentos possíveis para tentar incorporar a complexidade de produtos não *standard* no preço dos mesmos consiste em ajustar o valor de produtos simples e normalizados, procurando desta forma incorporar a sua complexidade. Este ajuste é aquilo que no mercado de dívida se chama ajustamento de convexidade.

Neste estudo, pretendemos centrar a nossa atenção numa classe muito particular de ajustamentos de convexidade, classe essa que se impõe quando os derivados de taxas de juro transaccionados não incorporam os intervalos de tempo convencionais. De entre todos os modelos sujeitos a este tipo de exotismo, analisaremos apenas aqueles que têm subjacentes as chamadas taxas LIBOR. O objectivo deste estudo é implementar em termos

numéricos alguns dos resultados recentes de Gaspar e Murgoci (2008), já que ficou então demonstrado ser possível obter o ajuste de convexidade como solução de um sistema de equações diferencial para modelos de taxa de juro com estrutura temporal afim. A análise aqui apresentada é feita para dois modelos bastante populares da classe afim - os modelos de Vasicek (1977) e de Cox-Ingersoll-Rox (1985), mas é facilmente generalizável para qualquer outro modelo da mesma classe.

## Capítulo 2

### Enquadramento teórico

O conceito de taxa de juro faz parte da vida quotidiana das sociedades modernas e, apesar de ser um conceito amplamente difundido e usado, os conceitos formais em que assenta a noção de taxa de juro são complexos e a sua análise não é linear. A reprodução do comportamento dos mercados de taxa de juro e dos seus derivados é portanto difícil, complexa mas estruturante.

Uma das formas de modelar o comportamento de sistemas financeiros é através de processos estocásticos em tempo contínuo. Desta forma, consegue-se uma representação matemática para a realidade económica, o que torna a sua análise particularmente elegante e concisa, através do uso de processos de difusão e de equações diferenciais estocásticas.

A exposição e desenvolvimento de um conjunto consistente e congruente deste edifício teórico passa inicialmente pela definição formal e rigorosa dos diferentes conceitos necessários à reprodução do comportamento dos mercados de dívida.

## 2.1 Definições e Notação

### 2.1.1 Processos Estocásticos

Segundo Evans (2006), um processo estocástico pode ser entendido como uma colecção de de variáveis aleatórias  $\{X(t), t \geq 0\}$  formalmente definido da seguinte forma.

Tomemos  $(\Omega, u, P)$  como um espaço de probabilidade. A função  $X : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}^n$  é designada como uma variável aleatória de  $n$  dimensões se, para cada  $B$  pertencente a uma colecção de subconjuntos de Borel de  $\mathfrak{R}^n$ , tivermos  $X^{-1}(B) \in u$ .

Em que:

i) A álgebra- $\sigma$  é uma colecção  $u$  de subconjuntos de  $\Omega$  com as propriedades:

- (i)  $\emptyset, \Omega \in u$
- (ii) se  $A \in u$ , então  $\Omega - A \in u$
- (iii) se  $A_1, A_2, \dots \in u$ , então  $\cup_{k=1}^{\infty} A_k, \cap_{k=1}^{\infty} A_k \in u$

ii) Ao triplete  $(\Omega, u, P)$  chamamos espaço de probabilidade desde que  $\Omega$  seja qualquer conjunto,  $u$  seja uma álgebra- $\sigma$  de subconjuntos de  $\Omega$  e  $P$  a probabilidade de média em  $u$ .

Segundo Björk (2004), um processo estocástico  $X$  é um processo de difusão se a sua dinâmica local puder ser descrita por uma equação diferencial estocástica dada por

$$X(t + \Delta t) - X(t) = \mu(t, X(t))\Delta t + \sigma(t, X(t))\Delta W(t). \quad (2.1)$$

O termo  $\mu$  é o responsável pelo *drift* do processo,  $\sigma$  é o termo responsável pela difusão e  $\Delta W(t)$  é definido como  $\Delta W(t) = W(t + \Delta t) - W(t)$ , em que  $W$  é conhecido como processo de Wiener.

Segundo Roepstorff (1994), um processo estocástico  $W$  é um processo de Wiener se possuir as condições:

- $W(0) = 0$
- Possuir incrementos independentes, ou seja, se  $r < s \leq t < u$  então  $W(u) - W(t)$  e  $W(s) - W(r)$  são variáveis estocásticas independentes
- Se  $s < t$ , a variável estocástica  $W(t) - W(s)$  possuir uma distribuição Gaussiana  $N(0, \sqrt{t - s})$
- $W$  possuir trajectórias contínuas

A equação (2.1) é para ser entendida em termos infinitesimais, sendo habitual a descrição através de equações diferenciais estocásticas do tipo

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad (2.2)$$

em que se utiliza o símbolo de diferencial  $d$  ao invés de  $\Delta$  (já que  $\Delta \rightarrow 0$ ) e com uma condição fronteira dada por

$$X(0) = a. \quad (2.3)$$

Formalmente, (2.2) e (2.3) é apenas uma representação da equação integral que descreve o processo de difusão

$$X(t) = a + \int_0^t \mu(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s), \quad (2.4)$$

e em que  $\int_0^t \mu(s, X(s))ds$  é um integral de Riemann e  $\int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s)$  é um integral de Itô (cf. anexo III).

## 2.1.2 Martingala

A teoria da integração estocástica está intimamente ligada à teoria das Martingalas pelo que, segundo Björk (2004), a teoria moderna dos derivados financeiros é de facto baseada maioritariamente na teoria das Martingalas.

Sendo  $X$  um processo estocástico, é fundamental perceber como definir e como tratar a informação por ele gerada, antes de introduzirmos e explanarmos o conceito de Martingala.

A informação gerada por  $X$  no intervalo  $[0, t]$ , de acordo com a notação usada por Björk, é definida através do símbolo  $F_t^X$ . Partindo da informação gerada por  $X$ , é possível perceber se um evento  $A$  ocorreu. Em caso de ocorrência, diremos que  $A \in F_t^X$  ou que  $A$  é mensurável em  $F_t^X$ .

Vamos definir  $F_t^X$  como a informação gerada por  $X$  no intervalo  $[0, t]$ . Baseando-nos na observação da trajectória  $\{X(s); 0 \leq s \leq t\}$ , é possível perceber se um acontecimento  $A$  ocorreu ou não. Escrevemos então que  $A \in F_t^X$  ou que  $A$  é mensurável em  $F_t^X$ . Se o valor de uma variável estocástica  $Z$  puder ser totalmente determinado dando observações da trajectória  $\{X(s); 0 \leq s \leq t\}$ , então  $A \in F_t^X$ . Se  $Y$  é um processo estocástico tal que  $Y(t) \in F_t^X$  para todo  $t \geq 0$ , então dizemos que  $Y$  é adaptado à filtração  $\{F_t^X\}_{t \geq 0}$ .

Dada uma filtração  $\{F_t\}_{t \geq 0}$ , para qualquer variável estocástica  $Y$  o símbolo  $E[Y|F_t]$  é interpretado como o valor expectável da variável  $Y$ , dada toda a informação disponível em  $t$ .

Se  $Y$  e  $Z$  são variáveis estocásticas e  $Z$  é mensurável em  $F_t$ , então

$$E[Z.Y|F_t] = Z.E[Y|F_t]. \quad (2.5)$$

Se  $Y$  é uma variável estocástica e se  $s < t$ , então

$$E[E[Y|F_t]|F_s] = E[Y|F_s]. \quad (2.6)$$

Um processo estocástico  $X$  é uma  $(F_t)$ -martingala se, e apenas se:

- $X$  é adaptado à filtração  $\{F_t\}_{t \geq 0}$
- para todo o  $t$ ,  $E[|X(t)|] < \infty$
- para todo o  $s$  e todo o  $t$ , com  $t \geq s$ , então  $E[X(t)|F_t] = X(s)$ .

Um processo que, para todo o  $s$  e  $t$ , com  $s \leq t$ , que satisfaz a inequação  $E[X(t)|F_t] \leq X(s)$ , é designado por supermartingala. Da mesma forma, um processo que, para todo o  $s$  e  $t$ , com  $s \leq t$ , satisfaz a inequação,  $E[X(t)|F_t] \geq X(s)$  é designado por submartingala.

Das condições que permitem caracterizar o processo estocástico como martingala, aquela que na nossa futura análise é mais relevante é a terceira condição, uma vez que partindo desta condição e da equação diferencial estocástica que caracteriza um processo estocástico é possível concluir que uma martingala não possui *drift* sistemático (Björk, 2004 e Evans, 2006).

Dois corolários muito importante para o nosso estudo e que derivam da análise das características das martingala são:

i) Qualquer processo  $X$  definido por  $X(t) = \int_0^t g(s)dW(s)$ , em que  $g$  é um processo qualquer que garanta as condições de integrabilidade de um integral estocástico, é uma martingala- $(F_t^W)$ ;

ii) Assumindo todas as condições de integrabilidade necessárias, um processo estocástico  $X$  representável por uma equação diferencial estocástica é uma martingala se, e apenas

se, a equação diferencial estocástica tiver a forma

$$dX(t) = g(t)dW(t). \quad (2.7)$$

### 2.1.3 Obrigações e taxas de juro

Uma obrigação é um contrato em que, mediante um investimento inicial, são prometidas ao comprador uma série de *cash-flows* futuros. A forma mais comum de obrigações (obrigações de cupão fixo) pode ser entendida como um empréstimo que o comprador da obrigação concede ao emitente da obrigação, tendo por isso direito a receber em datas pré-estabelecidas juros (os cupões) e no vencimento ainda o reembolso do capital. Qualquer obrigação deste tipo pode ser entendida como uma carteira de produtos mais simples que dão ao comprador o direito de receber um montante pré-estabelecido num momento futuro. A estes componentes mais simples chama-se obrigações de cupão zero. Cada obrigação de cupão zero tem apenas uma data de pagamento,  $T$ , no futuro. A modelação de todas as obrigações de cupão zero, isto é, para qualquer  $T$ , é equivalente a modelar as obrigações com cupão existentes na vida real. Assim, do ponto de vista matemático, o produto de referência são as chamadas "obrigações-T", que são obrigações de cupão zero que vencem em  $T$  e que dão direito a receber uma unidade monetária nessa data. O valor em  $t \leq T$  de uma obrigação-T é habitualmente denotado por  $p(t, T)$ .

Ao longo da análise e sem perda de capacidade de generalização, vamos assumir a existência de um mercado de obrigações suficientemente regular e rico. Este pressuposto é uma abstracção teórica necessária que não coloca em causa as conclusões que podemos retirar, podendo apenas limitar a sua validade em casos muito excepcionais. Vamos então assumir que o nosso mercado de obrigações é tal que:

- Existem no mercado obrigações-T para todas os tempos de maturidade possíveis;

- A relação  $p(T, T) = 1$  é válida para todo o  $T$ , ou seja, em qualquer instante de tempo a contratualização de uma obrigação com vencimento imediato custará uma unidade de dinheiro;
- Em qualquer instante de contratualização  $t$ , o valor da obrigação  $p(t, T)$  é diferenciável relativamente ao tempo de maturidade.

O valor das obrigações-T pode ser entendido como um objecto que depende de um objecto estocástico com duas variáveis ( $t$  e  $T$ ). Se tomarmos a variável  $t$  como tendo um valor numérico fixo, percebemos que, nestas condições,  $p(t, T)$  é uma função que explica o valor a pagar pela contratualização de uma obrigação para todos os tempos de maturidade possíveis. A representação gráfica obtida nesta situação é conhecida como estrutura temporal da obrigação em  $t$ . A estrutura temporal é habitualmente representável através de uma função determinística. Se tomarmos a variável  $T$  como tendo um valor numérico fixo, percebemos que nestas condições  $p(t, T)$  é um processo estocástico escalar, cuja representação nos dará o valor, para tempos diferentes, de uma obrigação com tempo de maturidade  $T$ . Uma representação gráfica desta situação é tipicamente muito irregular, sendo mesmo semelhante a um processo de Wiener.

Partindo das obrigações-T, é possível definir não só a noção de taxa de juro como um conjunto muito grande de diferentes taxas de juro. Considere-se um contrato obrigacionista contratado em  $t$ , válido para um intervalo de tempo  $[S, T]$ , em que  $t < S < T$ . Existem várias taxas de juro implícitas neste tipo de contrato, dependendo da forma como as definimos.

As definições mais importantes são as seguintes, tal como apresentadas por Björk (2004).

**Taxa forward para (S,T) contratada em t, com capitalização discreta** A taxa forward para (S,T) com capitalização discreta contratada em  $t$ , com aplicação no intervalo de tempo (S,T) e denotada por  $L(t; S, T)$ , é conhecida por taxa LIBOR forward, tal que

$$L(t; S, T) = -\frac{p(t, T)p(t, S)}{(T - S)p(t, T)}. \quad (2.8)$$

**Taxa spot para (S,T) contratada em t, com capitalização discreta** A taxa spot para (S,T) com capitalização discreta, denotada por  $L(S, T)$  é conhecida por taxa LIBOR spot, tal que

$$L(S, T) = -\frac{p(S, T) - 1}{(T - S)p(S, T)}. \quad (2.9)$$

**Taxa forward instantânea, contratada em t, com tempo de maturidade T** é definida por

$$f(t, T) = -\frac{\partial \log p(t, T)}{\partial T}. \quad (2.10)$$

**Taxa instantânea short rate em t** é definida por

$$r(t) = f(t, t). \quad (2.11)$$

Um conceito que também importa definir com bastante rigor é o conceito de conta bancária  $B(t)$ . De acordo com Björk (2004), pode definir-se a conta bancária a partir da relação

$$B_t = e^{\int_0^t r(s) ds}. \quad (2.12)$$

Esta relação também assume uma forma diferencial, sendo que neste caso a relação é dada por

$$dB(t) = r(t)B(t)dt, \quad (2.13)$$

com  $B(0) = 1$ .

Se investirmos numa conta bancária em  $t = 0$ , teremos em  $t$  o valor expresso em (2.12), sendo que  $r(t)$  é definida como uma taxa instantânea segundo a qual o valor da conta bancária aumenta. A taxa instantânea também é designada na literatura como taxa spot instantânea. Uma maior elucidação deste conceito pode ser obtida fazendo uma expansão de 1ª ordem em  $t$  de  $\Delta t$ , de tal forma que

$$B(t + \Delta t) = B(t)(1 + r(t)\Delta t). \quad (2.14)$$

Isto permite afirmar que, num intervalo de tempo pequeno arbitrário  $[t, t + \Delta t]$ ,

$$\frac{B(t + \Delta t) - B(t)}{B(t)} = r(t)\Delta t, \quad (2.15)$$

o que torna claro que a conta bancária cresce em todos os intervalos de tempo  $\Delta t$  a uma taxa  $r(t)$ .

Das definições previamente expressas obtemos como corolário lógico a relação

$$p(t, T) = p(t, S)e^{-\int_s^T f(t,u)du}. \quad (2.16)$$

Estamos agora em condições para apresentar as diferentes abordagens para modelar o mercado de obrigações, sendo que existem fundamentalmente três abordagens distintas:

- Podemos especificar as relações dinâmicas da short rate e posteriormente derivar os preços das obrigações por critérios de não arbitragem;
- Podemos especificar directamente a dinâmica associada ao mercado de obrigações;
- Podemos ainda especificar as dinâmicas das taxas forward instantâneas e, partindo do corolário apresentado anteriormente, obter um modelo para os preços das obrigações presentes no mercado.

Se escolhermos considerar a primeira abordagem, estamos no contexto dos chamados modelos de *short rate*. De acordo com Björk (2004), a maior parte dos modelos deste tipo parte do pressuposto de que a dinâmica da *short rate* é passível de ser representada por uma equação diferencial estocástica do tipo

$$dr(t) = a(t)dt + b(t)dW(t), \quad (2.17)$$

ou seja, que  $r$  segue um processo de difusão. O que distingue os diferentes modelos é a escolha dos processos adoptados  $a$  e  $b$ , como veremos mais à frente.

Se escolhermos modelar o comportamento do mercado partindo da dinâmica das obrigações - segunda abordagem - então, de acordo com o mesmo autor, considera-se a dinâmica do preço das obrigações

$$dp(t, T) = p(t, T)m(t, T)dt + p(t, T)v(t, T)dW(t). \quad (2.18)$$

Finalmente, na terceira abordagem, o comportamento do mercado é modelado a partir da dinâmica das taxas forward

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW(t). \quad (2.19)$$

Logicamente será possível modelar o comportamento do mercado partindo de qualquer uma destas relações, pelo que é possível estabelecer relações exactas e universalmente válidas para os diferentes parâmetros de cada uma das dinâmicas explanadas anteriormente. O procedimento por nós escolhido será partir da dinâmica da *short rate* para chegar ao preço do cupão zero e ao valor das taxas forward.

## 2.2 Modelos estocásticos para as short rate

Como já vimos anteriormente, existem formas distintas para proceder à representação e estudo de mercados de obrigações. Identificámos três possíveis formas de encarar o problema da modelação destes mercados. Vamos prosseguir seguindo aquela que é considerada a abordagem clássica a este problema, sendo a adoptada pela maioria dos autores nesta matéria (Björk, 2004; Hull, 2005; Benninga e Wiener, 1998), definindo à priori a dinâmica da taxa de juro short rate e, partindo dela obter as diferentes relações que permitem perceber e representar uma teoria das taxas de juro.

Assumimos que a representação do comportamento da taxa short rate, numa medida de probabilidade objectiva  $P$ , é conseguida através de uma equação diferencial estocástica que assume como forma geral a relação

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))d\bar{W}(t). \quad (2.20)$$

Uma vez que só o comportamento da taxa de juro estocástica é conhecido à priori, apenas podemos conhecer de forma exógena e imediata um outro processo, a conta bancária. Como já anteriormente discutimos, sendo conhecida a taxa de juro short, é possível definir a conta bancária partindo da sua dinâmica

$$dB(t) = r(t)B(t)dt. \quad (2.21)$$

Vamos também considerar que o mercado de obrigações possui disponível em todos os instantes de tempo e para todos os vencimentos. Nesta abordagem, as obrigações são vistas como um produto financeiro derivado da taxa de juro. Esta visão conceptual do mercado impõe duas questões fundamentais que importa ter sempre presente: Será o preço das obrigações determinado de forma unívoca pela dinâmica da taxa de juro short? Em que condições será o mercado de obrigações livre de arbitragem? Em resposta a estas perguntas, Björk (2004) diz-nos que o preço de uma qualquer obrigação não será comple-

tamente determinado simplesmente pela especificação da dinâmica da taxa de juro  $r(t)$  e pela imposição de um mercado sem possibilidade de arbitragem. Argumenta ainda que *"arbitrage pricing is always a case of pricing a derivative in terms of the price of some underlying assetes. In our market we do not have sufficiently many underlying assetes. We thus fail to determine a unique price of a particular bond."* (pp. 318). Apesar desta dificuldade, sabemos que o valor de uma obrigação tem de possuir pelo menos duas características fundamentais: (1) o valor de obrigações com diferentes maturidades terá de possuir algum tipo de consistência interna, de forma a que não seja possível a prática de arbitragem no mercado de obrigações e, (2) dado o valor de uma obrigação de referência, o valor de outras obrigações (com menor tempo de maturidade) terá de ser determinado de forma unívoca em função do valor da obrigação de referência e em função da dinâmica da taxa de juro short.

Concretizando as ideias apresentadas, vamos desenvolver um modelo representativo do mercado de obrigações assumindo que (1) existe no mercado de obrigações uma disponibilidade de obrigações para toda a escolha possível de diferentes vencimentos, (2) o mercado de obrigações não permite a prática de arbitragem e (3) para cada vencimento possível, o valor da obrigação de cupão zero pode representar-se da seguinte forma:

$$p(t, T) = F(t, r(t); T), \quad (2.22)$$

em que  $F$  é uma função regular de três variáveis reais.

A função  $F(t, r(t); T)$  possui uma condição fronteira óbvia que advém da própria definição de obrigação de cupão zero. No tempo de maturidade, a obrigação de cupão zero possui o valor contratualizado de uma unidade de dinheiro:

$$F(T, r(T); T) = 1. \quad (2.23)$$

A visão desenvolvida sobre o mercado de obrigações e a sua relação com as taxas de juro

permite que, usando a formula de Itô (cf. anexo II), possamos escrever a dinâmica do valor de uma obrigação com vencimento em  $T$ , sendo esta dinâmica:

$$dF(t, r(t); T) = F(t, r(t); T)\alpha_T dt + F(t, r(t); T)\sigma_T d\bar{W} \quad (2.24)$$

em que

$$\alpha_T = \frac{\frac{\partial F(t, r(t); T)}{\partial t} + \mu \frac{\partial F(t, r(t); T)}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F(t, r(t); T)}{\partial r^2}}{F(t, r(t); T)} \quad (2.25)$$

e

$$\sigma_T = \frac{\sigma \frac{\partial F(t, r(t); T)}{\partial r}}{F(t, r(t); T)}. \quad (2.26)$$

Se possuímos duas obrigações com vencimentos diferentes  $T$  e  $S$ , é possível construir uma carteira. Assumindo cada uma das carteiras relativas como  $u_S$  e  $u_T$ , o valor da carteira terá uma dinâmica dada pela relação

$$dV = V \left\{ u_T \frac{dF(t, r(t); T)}{F(t, r(t); T)} + u_S \frac{dF(t, r(t); S)}{F(t, r(t); S)} \right\}. \quad (2.27)$$

Esta relação, juntamente com a relação dinâmica para o valor das obrigações já anteriormente apresentada, permite concluir que

$$dV = V \left\{ \frac{\alpha_S \sigma_T - \alpha_T \sigma_S}{\alpha_T - \sigma_S} \right\} dt. \quad (2.28)$$

Esta relação, juntamente com a exigência de não arbitragem, implica que

$$\frac{\alpha_S \sigma_T - \alpha_T \sigma_S}{\alpha_T - \sigma_S} = r(t), \quad (2.29)$$

para todo o  $t$  com uma probabilidade de 1.

Esta relação permite obter uma relação geral de grande importância, nomeadamente que

$$\frac{\alpha_T(t) - r(t)}{\sigma_T(t)} = \lambda(t). \quad (2.30)$$

O processo  $\lambda$  pode ser interpretado como prémio de risco por unidade de volatilidade e é conhecido como preço de risco do mercado. Podemos concluir com base nesta relação e no seu significado que, num mercado sem a possibilidade de arbitragem, todas as obrigações, independentemente do seu tempo de maturidade, possuem o mesmo preço de risco do mercado. Note-se que (2.31) não depende de  $T$  ou  $S$ .

Partindo destes resultados, Björk (2004) formula uma relação fundamental para o estudo dos mercados de dívida. Nestes mercados, o valor das obrigações  $F(t, r(t); T)$  pode ser descrito pelas seguintes equações derivadas parciais, também conhecidas como equação de estrutura temporal

$$\frac{\partial F(t, r(t); T)}{\partial t} + \{\mu - \lambda\sigma\} \frac{\partial F(t, r(t); T)}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 F(t, r(t); T)}{\partial r^2} - rF(t, r(t); T) = 0 \quad (2.31)$$

com a condição fronteira que provém da própria definição de obrigação  $F(T, r(T); T) = 1$ .

Apesar de possuímos uma equação de estrutura temporal bem definida, ressalta uma grande dificuldade de tratamento do mercado de obrigações: o preço de risco do mercado  $\lambda$  não é determinado dentro do modelo desenvolvido; o seu valor será uma variável exterior ao modelo, uma variável exógena. O mesmo acontece com a especificação das variáveis  $\mu$  e  $\sigma$ .

De acordo com o teorema de Feynman-Kac (Roepstorff, 1994) a equação de estrutura temporal (2.32) tem ainda a seguinte representação estocástica

$$F(t, r(t); T) = E_{t,r}^Q[e^{-\int_t^T r(s)ds}], \quad (2.32)$$

em que a medida de martingala  $Q$  e as variáveis  $t$  e  $r$  denotam que o valor expectável será obtido a partir da equação dinâmica

$$dr(s) = \{\mu - \lambda\sigma\}ds + \sigma dW(s) \quad (2.33)$$

com  $r(t) = r$ .

O valor da obrigação de cupão zero num instante de tempo  $t$  é portanto dado como o valor expectável do pagamento final acordado (no caso será de uma unidade de dinheiro, devido à definição de obrigação de cupão zero adoptada), descontando este valor ao seu valor actual. Este mecanismo de desconto de um valor ao seu valor actual é denominado de deflactor e, neste caso, ele é representado pela expressão  $e^{-\int_t^T r(s)ds}$ . Sendo o valor expectável calculado não na medida de probabilidade objectiva  $P$  mas na medida de martingala  $Q$ , existe uma medida de martingala para cada escolha possível do parâmetro  $\lambda$ . Por esta razão, o modelo de mercado de obrigações é exógeno e não completo. Os valores das obrigações não são determinados de forma unívoca, existindo várias medidas de martingala possíveis e, como tal, a possibilidade de determinarmos diferentes valores para as obrigações. O valor das diferentes obrigações será dado em parte pela dinâmica da taxa short na medida de probabilidade objectiva e, em parte, pelas próprias forças subjectivas do mercado. A possibilidade de escolha de diferentes valores para o parâmetro  $\lambda$  significa que existem diferentes visões concebíveis sobre o comportamento do mercado de obrigações, sendo todas estas visões consistentes com uma mesma dinâmica da taxa short. Uma escolha prévia do valor de  $\lambda$  tem implícita uma visão sobre os diferentes factores de risco presentes no mercado.

Uma vez determinado o valor de  $\lambda$ , todas as obrigações presentes no mercado serão determinadas pela equação de estrutura temporal e pela dinâmica da taxa de juro short.

Temos então de perceber que modelos podemos desenvolver para a dinâmica da taxa de juro short, sendo que esta será sempre dada, numa medida de probabilidade  $P$  pela relação

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))d\bar{W}. \quad (2.34)$$

Os modelos estocásticos de taxas de juro podem ser catalogados em duas classes distintas: modelos de equilíbrio e modelos de não-arbitragem (Brigo e Mercurio, 2007).

Os modelos de equilíbrio são construídos assumindo o comportamento das variáveis económicas e derivando o processo dinâmico para a taxa instantânea. Nestes modelos, a estrutura temporal da taxa de juro é obtida a partir da taxa instantânea. São, por isso, também conhecidos como modelos endógenos.

Os modelos de não-arbitragem são aqueles em que a estrutura temporal da taxa de juro é apropriada directamente do mercado, sendo posteriormente obtidas as variáveis económicas relevantes. Nestes modelos, a estrutura temporal da taxa de juro funciona como *input*, pelo que estes modelos também são conhecidos como modelos exógenos.

A maior parte dos modelos de equilíbrio de um factor descrevem o processo da taxa de juro instantânea, na medida de risco neutral, através de um processo de Itô:

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dw. \quad (2.35)$$

Os primeiros modelos estocásticos de taxa de juro propostos na literatura financeira eram homogéneos relativamente ao tempo, ou seja, a sua dinâmica dependia apenas de coeficientes constantes. O facto de serem modelos homogéneos relativamente ao tempo permitia uma análise cuidada. Por esse motivo, modelos como o de Vasicek (1977) e o de Cox, Ingersoll e Ross (1985) obtiveram grande reconhecimento continuando a ser hoje em dia uma referência, quer para agentes do mercado, quer para estudiosos dos mercados de dívida.

No entanto, cedo se percebeu que os modelos homogéneos relativamente ao tempo produziam estruturas temporais de taxas de juro endógenas. Estes modelos de estruturas temporais, por terem um número limitado de parâmetros, não permitem uma calibração

satisfatória aos dados do mercado. Outro problema é que algumas formas geométricas associadas às estruturas temporais do mercado não podem ser reproduzidas com estes modelos. Este tipo de modelos levanta assim alguns problemas e introduz uma distinção significativa entre os modelos teóricos e o seu objecto de estudo, o mercado. Apesar de todos os problemas que levantam, eles são fundamentais no estudo e análise do mercado de dívida, não só por razões históricas mas porque permitem uma análise e um tratamento claro das principais problemáticas envolvidas no estudo destes mercados.

Neste trabalho vamos, sem perda de objectividade e utilidade, cingir o nosso estudo a dois modelos clássicos, homogéneos no tempo e endógenos: o modelo de Vasicek e o modelo de Cox, Ingersoll e Ross.

A teoria da modelação de taxas de juro foi originalmente construída tentando descrever a dinâmica a uma dimensão para a taxa spot instantânea  $r$ . Modelar directamente a dinâmica é muito conveniente, uma vez que permite que todas as quantidades fundamentais (taxas e obrigações) sejam definidas por argumentos de não arbitragem.

Como também já vimos anteriormente, a estrutura temporal será completamente determinada a partir da equação geral de estrutura temporal

$$\frac{\partial F(t, r(t); T)}{\partial t} + \{\mu - \lambda\sigma\} \frac{\partial F(t, r(t); T)}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 F(t, r(t); T)}{\partial r^2} - rF(t, r(t); T) = 0 \quad (2.36)$$

com a condição fronteira que provém da própria definição de obrigação  $F(T, r(T); T) = 1$ .

Isto permite afirmar que a estrutura temporal, bem como o valor de todos os derivados de taxas de juro, são completamente determinados pela especificação da dinâmica da taxa de juro short na medida de martingala  $Q$ .

Em vez de especificarmos  $\mu$  e  $\lambda$  na medida de probabilidade  $P$ , iremos especificar a dinâmica da taxa short  $r$  directamente na medida de martingala  $Q$ . Este procedimento é conhecido como modelação da martingala e tipicamente é feita a assunção de que  $r$  na medida  $Q$  possui uma dinâmica dada pela relação

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW. \quad (2.37)$$

Na literatura existe um largo número de propostas sobre como especificar a dinâmica de  $r$  na medida  $Q$ . Os modelos que iremos estudar no nosso trabalho são o modelo de Vasicek, em que esta dinâmica é dada por

$$dr(t) = (b - ar)dt + \sigma dW, \quad (2.38)$$

e o modelo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) em que a dinâmica é dada por

$$dr(t) = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dW. \quad (2.39)$$

O problema com esta abordagem surge quando pretendemos estimar os diferentes parâmetros dos modelos na medida de martingala definida. De facto, ao escolhermos modelar a dinâmica da taxa de juro short na medida de martingala  $Q$ , isso quer dizer que os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $\sigma$  são válidos para a medida de martingala  $Q$ . Quando fazemos observações no mercado não estamos a observar  $r$  na medida de martingala  $Q$  mas na medida objectiva de mundo real  $P$ . O que significa que, se aplicarmos mecanismos estatísticos no processamento dos dados observados, não obteremos uma estimativa dos parâmetros na medida em que estamos a modelar o comportamento das taxas de juro, a medida  $Q$ . Björk (2004) propõe um procedimento para transpor esta dificuldade conhecido como "inverting the yield curve". Um dos facilitadores do procedimento proposto por Björk é o uso de modelos para a dinâmica da taxa de juro que sejam analiticamente manipuláveis. Sabemos da experiência que os modelos analiticamente mais manipuláveis são os modelos em que a estrutura temporal é afim.

### 2.2.1 Modelos com estrutura temporal afim

Benninga e Wiener(1998), Björk (2004) e Brigo e Mercurio (2007) definem que a estrutura temporal de uma obrigação é afim, se a estrutura temporal  $\{p(t, T); 0 \leq t \leq T, T > 0\}$  tem a forma

$$p(t, T) = F(t, r(t); T), \quad (2.40)$$

em que  $F$  tem a forma,

$$F(t, r(t); T) = e^{A(t,T) - B(t,T)r(t)}, \quad (2.41)$$

em que  $A$  e  $B$  são funções determinísticas.

Como já referimos, a existência de uma estrutura temporal afim permite uma tratabilidade analítica e computacional muito elevada.

Assumindo que na medida martingala  $Q$  a dinâmica da taxa de juro short é dada por

$$dr(t) = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dW, \quad (2.42)$$

o facto de a estrutura temporal da taxa de juro short ser afim significa que a equação

$$\frac{\partial F(t, r(t); T)}{\partial t} + \{\mu - \lambda\} \frac{\partial F(t, r(t); T)}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F(t, r(t); T)}{\partial r^2} - rF(t, r(t); T) = 0, \quad (2.43)$$

com a condição fronteira que provém da própria definição de obrigação  $F(T, r(T); T) =$

1, pode ser reduzida à equação

$$\frac{\partial A(t, T)}{\partial t} - \left\{1 + \frac{\partial B(t, T)}{\partial t}\right\}r - \mu(t, r)B(t, T) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, r)B^2(t, r) = 0 \quad (2.44)$$

com as condições fronteira dadas por  $A(T, T) = 0$  e  $B(T, T) = 0$ .

As condições de existência de uma estrutura temporal afim e postula que se  $\mu$  e  $\sigma$  são da forma

$$\mu(t, r) = \alpha(t)r + \beta(t), \quad (2.45)$$

e

$$\sigma(t, r) = \sqrt{\gamma(t)r + \delta(t)}. \quad (2.46)$$

Quando o modelo admite uma estrutura temporal afim e a sua equação de estrutura é representável por (2.45), torna-se de muito mais fácil resolução, até porque (2.45) é uma equação separável, e por isso equivalente ao sistema de equações diferenciais ordinárias.

$$\frac{\partial B(t, T)}{\partial t} + \alpha(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\gamma(t)B^2(t, T) = -1, \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial A(t, T)}{\partial t} = \beta(t), B(t, T) - \frac{1}{2}\delta(t)B^2(t, T) \quad (2.48)$$

com as condições fronteira  $A(T, T) = 0$  e  $B(T, T) = 0$ .

Existe, na prática, uma definição dos valores aceitáveis e mais ajustados dos diferentes parâmetros ao comportamento do mercado (Zeytun e Gupta, 2007), obtendo de seguida uma estrutura temporal descritiva do mercado. Os modelos exógenos são, normalmente, apropriações de modelos endógenos em que os parâmetros do mesmo são substituídos por parâmetros com uma dependência explícita do tempo, tentando obter desta forma uma fácil comparação e apropriação da estrutura temporal do mercado e obtendo os valores exactos para os diferentes parâmetros. O principal problema dos modelos endógenos

prende-se com as dificuldades de calibração dos mesmos aos dados do mercado, sendo muitas vezes impossível a reprodução do comportamento do mercado uma vez que, no limite, temos um número finito e limitado de parâmetros passíveis de estimação para descrever um número infinito de valores no mercado.

### 2.2.2 Modelo de Vasicek

Em 1977, Vasicek assumiu que as taxas spot instantâneas, na medida de mundo real, tinham uma dinâmica similar a um processo de Ornstein-Uhlenbeck de coeficientes constantes. Numa escolha ajustada do preço de risco no mercado, esta tese significa assumir que  $r$  segue um processo de Ornstein-Uhlenbeck de coeficientes constantes, numa medida de risco neutral dada por

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma dW(t), r(0) = r_0, \quad (2.49)$$

com  $r_0$ ,  $k$ ,  $\theta$  e  $\sigma$  constantes positivas. O que, procedendo a uma integração, nos permite afirmar que, para cada  $s \leq t$ ,

$$r(t) = r(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-k(t-u)} dW(u), \quad (2.50)$$

o que significa que  $r(t)$  tem uma distribuição normal com valor médio  $E(r(t))$  e variância  $\text{Var}(r(t))$ , dados respectivamente por

$$E(r(t)) = r(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) \quad (2.51)$$

e

$$\text{Var}(r(t)) = \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2k(t-s)}). \quad (2.52)$$

É um modelo conceptualmente muito importante porque possui um conjunto de propriedades úteis para a análise de mercados de dívida, nomeadamente: (1) o facto de a equação

dinâmica da taxa spot instantânea ser uma equação linear e de, por isso, poder ser resolvida e tratada analiticamente; (2) a distribuição associada à taxa spot instantânea ser uma distribuição gaussiana; e (3) os diferentes parâmetros intervenientes na equação dinâmica serem de interpretação financeira explícita e de fácil obtenção no mercado. Apesar da sua enorme importância conceptual e histórica, este modelo tem alguns problemas sérios. As duas principais debilidades apontadas são o de permitir que, com uma probabilidade não nula, as taxas de juro assumam valores negativos e o facto de ser um modelo endógeno.

Ou seja, existe a implicação necessária de, para cada tempo  $t$ , a taxa spot instantânea  $r(t)$  ter uma probabilidade positiva de ser negativa. Esta possibilidade é, de facto, o maior revés associado a este modelo. É um dado histórico e conceptual a não existência de taxas de juro negativas. No entanto, o facto de a densidade de probabilidade envolvida ser gaussiana é um garante de maleabilidade não passível de ser obtido com outras densidades de probabilidade.

Como consequência das expressões obtidas para o valor médio  $E(r(t))$  e variância  $Var(r(t))$ , a taxa spot instantânea  $r(t)$  tem uma característica muito importante, possui uma regressão para a média, uma vez que a taxa esperada tende, à medida que  $t$  tende para infinito, para  $\theta$ . Por esta razão,  $\theta$  é interpretado como o termo médio longo da taxa de juro.

Sabendo que o valor da obrigação de cupão zero em  $t$ , com tempo de maturidade  $T$ , na medida de risco neutral, é dada por

$$p(t, T) = E_t^Q[e^{-\int_t^T r(s)ds}], \quad (2.53)$$

então, no modelo de Vasicek, o valor da obrigação de cupão zero é

$$p(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)} \quad (2.54)$$

em que

$$A(t, T) = e^{(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2})(B(t, T) - T + t) - \frac{\sigma^2}{4k} B(t, T)^2} \quad (2.55)$$

e

$$B(t, T) = \frac{1}{k}(1 - e^{-k(T-t)}). \quad (2.56)$$

Uma questão pertinente que podemos colocar em relação ao modelo de Vasicek na medida de risco neutral é, precisamente, como apresentar este modelo na medida de mundo real. Apesar de as previsões de diferentes taxas serem sempre feitas na medida de risco neutral, a medida de mundo real é de uma importância crucial, uma vez que qualquer tentativa de parametrização terá de ser feita nesta medida.

Na medida de mundo real, o modelo de Vasicek apresenta como dinâmica para o nosso processo

$$dr(t) = (k\theta - (k + \lambda\sigma)r(t))dt + \sigma dW^0(t), r(0) = r_0, \quad (2.57)$$

em que  $\lambda$  surge como um novo parâmetro: o contributo para o preço de risco do mercado.

Da comparação entre a dinâmica obtida na medida de risco neutral e a dinâmica obtida na medida de mundo real, facilmente percebemos que, se  $\lambda = 0$ , as duas dinâmicas coincidem. Na medida de mundo real, a nossa taxa é novamente expressa como uma equação estocástica diferencial gaussiana. Se impusermos que as dinâmicas sejam da mesma natureza para as duas medidas, impomos uma mudança de medida de Girsanov (cf. anexo IV):

$$\frac{dQ}{dQ_0} = e^{-\frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2 r(s)^2 ds + \int_0^t \lambda r(s) ds dW^0(s)}. \quad (2.58)$$

Ou seja, na prática assumimos que o preço de risco de mercado  $\lambda(t)$  é tal que

$$\lambda(t) = \lambda r(t). \quad (2.59)$$

### 2.2.3 Modelo Cox, Ingersoll e Ross (CIR)

O modelo desenvolvido em 1985 por Cox, Ingersoll e Ross, doravante denotado simplesmente por CIR, foi desenvolvido com base numa abordagem baseada num equilíbrio geral. Este modelo levou à introdução de uma raiz quadrada no coeficiente do termo de difusão da taxa spot instantânea, termo esse não encontrado no modelo de Vasicek. O modelo CIR foi amplamente difundido no estudo de mercados de dívidas porque, tratando-se de um modelo do tipo afim, garante grande maleabilidade matemática conseguindo, no entanto, eliminar a possibilidade da existência de uma probabilidade positiva para taxas negativas.

A formulação deste modelo na medida de risco neutral é

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), r(0) = r_0, \quad (2.60)$$

em que  $r_0$ ,  $k$ ,  $\theta$  e  $\sigma$  são constantes positivas.

Paralelamente, impomos uma condição auxiliar aos diferentes termos constantes envolvidos no processo

$$2k\theta > \sigma^2, \quad (2.61)$$

condição esta que garante a não existência de taxas negativas.

A formulação da dinâmica deste processo, na medida de mundo real, é tal que

$$dr(t) = (k\theta - (k + \lambda\sigma)r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW^0(t), r(0) = r_0. \quad (2.62)$$

Enquanto a mudança de medidas, no caso de Vasicek, foi desenhada de modo a manter a natureza linear da dinâmica, neste caso, a mudança de medida é desenhada de forma a manter estrutura de raiz quadrada no processo, garantido dessa forma que  $r(t) > 0$ , particularmente

$$\frac{dQ}{dQ^0} = e^{-\frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2 r(s) ds + \int_0^t \lambda \sqrt{r(s)} dW^0(s)} \quad (2.63)$$

ou, por outras palavras, assumimos que o preço de risco no mercado segue uma dinâmica representada pela relação

$$\lambda(t) = \lambda \sqrt{r(t)}. \quad (2.64)$$

De volta à medida de risco neutral, provamos que o processo dinâmico  $r$  produz uma distribuição não central de chi-quadrado com valor médio e variância dados respectivamente por

$$E(r(t)) = r(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) \quad (2.65)$$

e

$$Var(r(t)) = r(s) \frac{\sigma^2}{k} (e^{-k(t-s)} - e^{-2k(t-s)}) + \theta \frac{\sigma^2}{2k} (1 - e^{-k(t-s)})^2. \quad (2.66)$$

Este modelo apresenta, como relações para o preço em  $t$  das obrigações de cupão zero com maturidade em  $T$ , a relação

$$p(t, T) = e^{A(t, T) - B(t, T)r(t)} \quad (2.67)$$

em que

$$A(t, T) = \ln \left[ \left( \frac{2he^{(k+h)(T-t)/2}}{2h + (k+h)(e^{(T-t)h} - 1)} \right)^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}} \right] \quad (2.68)$$

e

$$B(t, T) = \frac{2(e^{(T-t)h} - 1)}{2h + (k+h)(e^{(T-t)h} - 1)} \quad (2.69)$$

com

$$h = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}. \quad (2.70)$$

## 2.3 Ajuste de convexidade

Muitos derivados de taxas de juro são caracterizados pelo facto de o pagamento depender de várias taxas de juro que podem ser observadas num tempo futuro  $T$ . Os produtos financeiros por nós analisados são caracterizados pelo facto de o pagamento ocorrer num tempo futuro  $S$  ( $S \geq T$ ) diferente daquele a que as taxas de juro envolvidas no derivado se referem. A diferença temporal introduzida por este facto introduz dificuldades no cálculo do valor do derivado. A prática comum para transpor estas dificuldades consiste em calcular o valor assumindo que o pagamento do derivado se comporta como uma martingala com propriedades conhecidas e, partindo dessa martingala, ajustar o valor com aquilo que é conhecido como um ajuste de convexidade (Gaspar e Murgoci, 2009).

Dada uma taxa de juro  $y$  com um vencimento em  $T$  e um contrato com pagamento  $\phi(y(T))$ , a ser feito em  $S \geq T$ , o valor  $V$  deste derivado em  $T$  é

$$V(T) = p(T, S)\phi(y(T)). \quad (2.71)$$

Usando  $p(\cdot, S)$  como *numerário*, obtemos o valor do derivado num tempo  $t$  qualquer, sendo que  $t \leq T \leq S$  é dado por

$$V(t) = E_t^Q[e^{-\int_t^S r(u)du}\phi(y(T))] \quad (2.72)$$

ou

$$V(t) = p(t, S)E_t^S[\phi(y(T))], \quad (2.73)$$

em que  $r$  denota a taxa short instantânea,  $E_t^Q[\cdot]$  e  $E_t^S[\cdot]$  denotam o valor expectável condicionado pela filtração  $F_t$  na medida de risco neutral  $Q$  e na medida futura  $S$ .

Se o pagamento fosse uma martingala na medida  $S$  então teríamos

$$V(t) = p(t, S)\phi(y(t)). \quad (2.74)$$

No entanto, na maioria dos casos de interesse, o pagamento é uma martingala numa outra medida de martingala  $\phi$  e, nesse caso,

$$\phi(y(t)) = E_t^\phi[\phi(y(T))]. \quad (2.75)$$

Fazendo uso da derivada de Radon-Nikodym temos

$$\phi(y(t)) = E_t^\phi[\phi(y(T))] = E_t^S[\phi(y(T))\frac{dQ^\phi}{dQ^S}] = E_t^S[\phi(y(T))\Lambda(T)]. \quad (2.76)$$

Definimos agora o ajuste de convexidade como a expressão matemática  $CC^\phi$ , dada pela relação

$$E_t^S[\phi(y(T))] = \phi(y(t)) + CC^\phi(t, T, S). \quad (2.77)$$

Ou, tendo em conta as relações anteriores,

$$CC^\phi(t, T, S) = E_t^S[\phi(y(T))] - E_t^\phi[\phi(y(T))]. \quad (2.78)$$

Produtos financeiros cujo pagamento depende de taxas LIBOR envolvem tipicamente o pagamento de taxas LIBOR  $L(T, S)$  no fim do período de aplicabilidade da taxa, ou seja em  $S$ , apesar de o valor ter sido determinado em  $T$ . Existem produtos financeiros mais exóticos em que é requerido o pagamento adiantado, ou seja, são produtos cujo pagamento depende da taxa  $L(T, S)$  e serão pagos no início do período de aplicabilidade da taxa LIBOR, em  $T$ .

Quando lidamos com produtos de pagamento adiantado, estamos interessados em conhecer o valor expectável destes produtos

$$E_t^Q[e^{-\int_t^T r(u)du} L(T, S)] = p(t, T)E_t^T[L(T, S)] = p(t, T)E_t^T[L(T, T, S)]. \quad (2.79)$$

A taxa LIBOR envolvida é uma martingala na medida  $S$  mas não na medida de interesse para este caso, a medida em  $T$ . Ou seja,  $E_t^T[L(T, T, S)] \neq L(t, T, S)$ . A única forma de calcular este valor será recorrendo a um ajusto de convexidade

$$E_t^T[L(T, S)] = L(t, T, S) + CC(t, T, S). \quad (2.80)$$

De forma mais genérica, podemos definir uma correcção quando o valor expectável da taxa LIBOR, numa qualquer medida forward- $U$ , com  $T \leq U \leq S$  é

$$CC(t, T, U, S) = E_t^U(L(T, S)) - L(t, T, S), \quad (2.81)$$

sabendo que

$$E_t^U[L(T, S)] = \frac{1}{S - T} [E_t^U[\frac{1}{p(T, S)}] - 1]. \quad (2.82)$$

Gaspar e Murgoci (2008), mostraram que para qualquer modelo afim multivariado, o ajuste de convexidade para produtos LIBOR do tipo acima descrito é dado por

$$CC_a(t, T, U, S) = \frac{1}{S - T} \frac{p(t, T)}{p(t, S)} (e^{F(t, T, U, S) + G(t, T, U, S)z_t} - 1), \quad (2.83)$$

em que  $F$  e  $G$  são funções deterministas de  $(t, T, U, S)$  passíveis de ser obtidas através do sistema de equações diferenciais

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (B(t, S) - B(t, U))k_0(t)(B(t, T) - B(t, S)) + Gd(t) - Gk_0(t)B(t, U) + \frac{1}{2}Gk_0(t)G + Gk_0(t)(B(t, T) - B(t, S)) = 0$$

$$F(T; T, U, S) = 0 \tag{2.84}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + (B(t, S) - B(t, U))K(t)(B(t, T) - B(t, S)) + GE(t) - GK(t)B(t, U) + \frac{1}{2}GK(t)G + GK(t)(B(t, T) - B(t, S)) = 0$$

$$G(T; T, U, S) = 0. \tag{2.85}$$

Trata-se de um resultado bastante geral e que procuraremos implementar para o caso dos modelos afins univariados de Vasicek e CIR.

Os nossos objectivos são, em primeiro lugar, demonstrar como se podem obter as soluções numéricas para ajustes de convexidade de taxas LIBOR e, em segundo lugar, perceber a influência que cada um dos parâmetros destes modelos tem no ajuste de convexidade.

# Capítulo 3

## Análise numérica

Propomo-nos agora perceber a influência de cada um dos parâmetros dos modelos estudados no ajuste de convexidade. Para realizar esta análise de sensibilidade vamos abordar o problema de duas formas complementares: (1) tentaremos sempre que possível obter uma versão discretizada das diferentes relações, fazendo para isso uma discretização do modelo através do método de Euler; (2) faremos uso das nossas ferramentas de simulação para analisar a sensibilidade nas diferentes relações em função de cada um dos parâmetros de modelação dos dois modelos estudados, o modelo de Vasicek e o modelo CIR.

### 3.1 O modelo de Vasicek

Tentaremos, nesta secção, estudar e perceber a influência dos parâmetros intervenientes no modelo de Vasicek na determinação do valor da taxa de juro instantânea, das obrigações de cupão zero, da taxa LIBOR e do ajuste de convexidade da taxa LIBOR.

#### 3.1.1 Sensibilidade da taxa de juro instantânea relativamente aos diferentes parâmetros

Como já expusemos anteriormente, o modelo de Vasicek apresenta como equação dinâmica para a modelação do comportamento da taxa de juro instantânea a relação

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma dW(t), \quad (3.1)$$

em que  $k$   $\theta$   $\sigma$  são constantes cujo valor depende dos dados do mercado que pretendemos simular. Estes parâmetros podem por isso ser vistos como os parâmetros de modelação do nosso sistema e serão eles os parâmetros relativamente aos quais importa perceber a influência.

Se procedermos à discretização da equação dinâmica da taxa de juro instantânea proposta por Vasicek, usando o método de Euler (Zeytun e Gupta, 2007) chegamos à equação

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + k(\theta - r(t_i))\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}W_{i+1}. \quad (3.2)$$

### **Sensibilidade da taxa de juro instantânea relativamente ao parâmetro $k$**

O estudo da sensibilidade do nosso modelo relativamente ao parâmetro  $k$  é conseguido substituindo  $k$  por um valor tão próximo quanto necessário  $k + \delta_k$ . De tal forma que a nossa versão discretizada da taxa de juro instantânea será dada por

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + (k + \delta_k)(\theta - r(t_i))\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}W_{i+1}. \quad (3.3)$$

A mudança na taxa de juro instantânea em uma unidade de discretização será portanto dada pela relação

$$\Delta_k r(t_{i+1}) = r_k(t_{i+1}) - r(t_{i+1}) = \delta_k(\theta - r(t_i))\Delta t. \quad (3.4)$$

Esta relação demonstra que, se variarmos  $k$ , o próximo valor da taxa de juro instantânea sobre uma variação  $\delta_k(\theta - r(t_i))\Delta t$  será, considerando as duas variações possíveis do parâmetro  $k$ , se  $\delta_k > 0$ , uma de duas classes de resultado possíveis:

(1) se a taxa instantânea actual  $r(t_i)$  possui um valor inferior ao da taxa instantânea a

longo prazo  $\theta$ , ou seja, se  $\theta - r(t_i) > 0$ , vemos que da variação do parâmetro  $k$  resultará uma aproximação mais rápida entre o valor da taxa instantânea actual  $r(t_i)$  e o valor da taxa instantânea a longo prazo  $\theta$

$$\theta - r(t_i) > 0 \mapsto \Delta_k r(t_{i+1}) > 0 \quad (3.5)$$

(2) se a taxa instantânea actual  $r(t_i)$  possui um valor superior ao da taxa instantânea a longo prazo  $\theta$ , ou seja, se  $\theta - r(t_i) < 0$ , vemos que da variação do parâmetro  $k$  resultará uma aproximação mais rápida entre o valor da taxa instantânea actual  $r(t_i)$  e o valor da taxa instantânea a longo prazo  $\theta$

$$\theta - r(t_i) < 0 \mapsto \Delta_k r(t_{i+1}) < 0. \quad (3.6)$$

Se  $\delta_k < 0$  temos, mais uma vez, duas classes de resultado possíveis:

(1) Se a taxa instantânea actual  $r(t_i)$  possui um valor inferior ao da taxa instantânea a longo prazo  $\theta$ , ou seja, se  $\theta - r(t_i) > 0$ , vemos que da variação do parâmetro  $k$  resultará uma aproximação mais lenta entre o valor da taxa instantânea actual  $r(t_i)$  e o valor da taxa instantânea a longo prazo  $\theta$

$$\theta - r(t_i) > 0 \mapsto \Delta_k r(t_{i+1}) < 0 \quad (3.7)$$

(2) Se a taxa instantânea actual  $r(t_i)$  possui um valor superior ao da taxa instantânea a longo prazo  $\theta$ , ou seja, se  $\theta - r(t_i) < 0$ , vemos que da variação do parâmetro  $k$  resultará uma aproximação mais lenta entre o valor da taxa instantânea actual  $r(t_i)$  e o valor da taxa instantânea a longo prazo  $\theta$

$$\theta - r(t_i) < 0 \mapsto \Delta_k r(t_{i+1}) > 0. \quad (3.8)$$

Desta análise resulta que o valor do parâmetro  $k$  não afecta o valor da taxa instantânea

a longo prazo mas possui uma influência decisiva sobre a velocidade com que se dá a convergência entre o valor actual da taxa instantânea e o valor da taxa instantânea a longo prazo.

Sabemos que o modelo proposto por Vasicek para a dinâmica da taxa de juro instantânea assume que à taxa de juro instantânea está associada uma distribuição normal caracterizada por um valor expectável

$$E[r(t)] = r(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) \quad (3.9)$$

e por uma variância

$$Var[r(t)] = \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2k(t-s)}). \quad (3.10)$$

Daqui concluímos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[r(t)] = \theta \quad (3.11)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Var[r(t)] = \frac{\sigma^2}{2k}. \quad (3.12)$$

Ou seja, o parâmetro  $k$  não influencia o valor esperado da taxa de juro instantânea a longo prazo, mas influencia o valor esperado da variância da taxa de juro a longo prazo. Um aumento do parâmetro  $k$  em  $\delta k$  diminui a variância esperada, diminuindo a volatilidade associada. Ou seja, um aumento do parâmetro  $k$  implica uma maior taxa de convergência entre o valor actual da taxa de juro instantânea e o seu limite (taxa de juro instantânea a longo prazo) pelo que, necessariamente, teremos uma variância menor, uma volatilidade menor.

Permitimo-nos concluir que: (1)  $k$  é um parâmetro importante na determinação de instrumentos financeiros que são afectados pela volatilidade; (2)  $k$  é um parâmetro que não

influencia o valor esperado da taxa de juro a longo prazo mas que tem um papel importante na velocidade de convergência da taxa de juro actual relativamente à taxa de juro a longo prazo e (3)  $k$  é um parâmetro que influencia a variância da taxa de juro esperada.

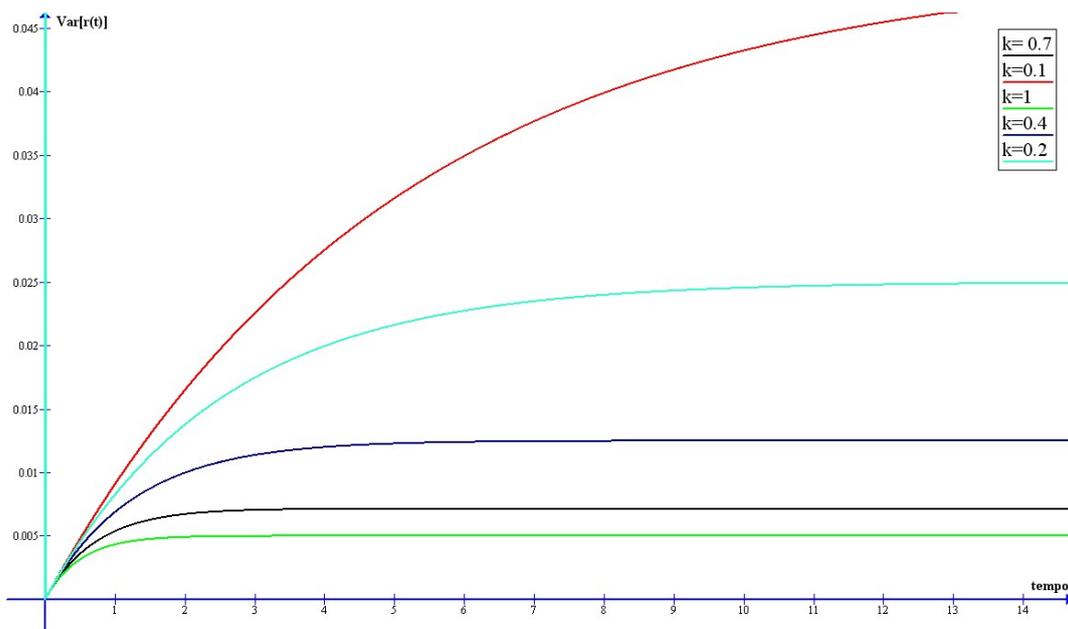


Figura 3.1: Sensibilidade do modelo de Vasicek relativamente ao parâmetro  $k$  (variância)

### Sensibilidade da taxa de juro instantânea relativamente ao parâmetro $\theta$

O estudo da sensibilidade do nosso modelo relativamente ao parâmetro  $\theta$  é conseguido substituindo  $\theta$  por um valor tão próximo quanto necessário  $\theta + \delta\theta$ . De tal forma que a nossa versão discretizada da taxa de juro instantânea será dada por

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + k(\theta + \delta\theta - r(t_i))\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}W_{i+1}. \quad (3.13)$$

A mudança na taxa de juro instantânea em uma unidade de discretização será portanto dada pela relação

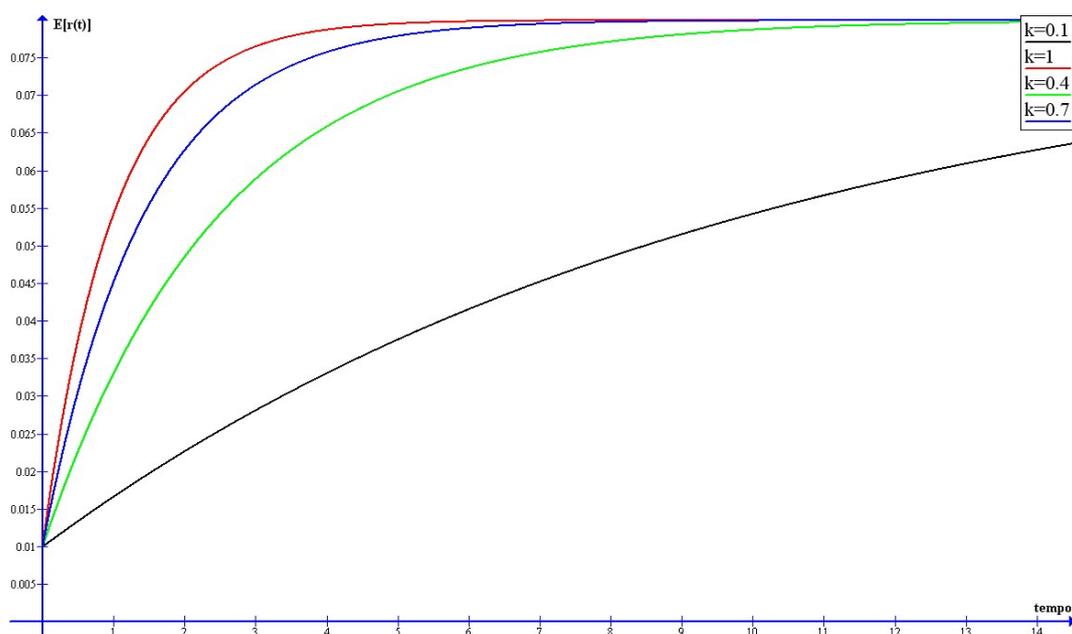


Figura 3.2: Sensibilidade do modelo de Vasicek relativamente ao parâmetro  $k$  (valor esperado)

$$\Delta_{\theta} r(t_{i+1}) = r_{\theta}(t_{i+1}) - r(t_{i+1}) = \delta_{\theta} k \Delta t. \quad (3.14)$$

Esta relação demonstra que, se variarmos  $\theta$ , o próximo valor da taxa de juro instantânea sofre uma variação  $\delta_{\theta} k \Delta t$ .

Esta variação da taxa de juro instantânea será tanto mais importante quanto maior o valor do parâmetro  $k$ . Como seria de esperar, uma alteração do valor de  $\theta$  provoca uma alteração proporcional no valor expectável da nossa taxa de juro

$$E[r(t)_{\theta}] = r(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) + \delta\theta(1 - e^{-k(t-s)}), \quad (3.15)$$

mas não provoca qualquer alteração no valor expectável da nossa variância

$$Var[r(t)_{\theta}] = \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2k(t-s)}) \quad (3.16)$$

porque

$$E[r(t)_\theta] - E[r(t)] = \delta\theta(1 - e^{-k(t-s)}) \quad (3.17)$$

e

$$Var[r(t)_\theta] - Var[r(t)] = 0. \quad (3.18)$$

Daqui resulta que a variação na taxa de juro a longo prazo será

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[r(t)_\theta] - E[r(t)] = \delta\theta \quad (3.19)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Var[r(t)_\theta] - Var[r(t)] = 0. \quad (3.20)$$

Estes resultados são os esperados porque reforçam a nossa ideia presente em toda a literatura da interpretação do parâmetro  $\theta$  como o valor da taxa de juro a longo prazo.

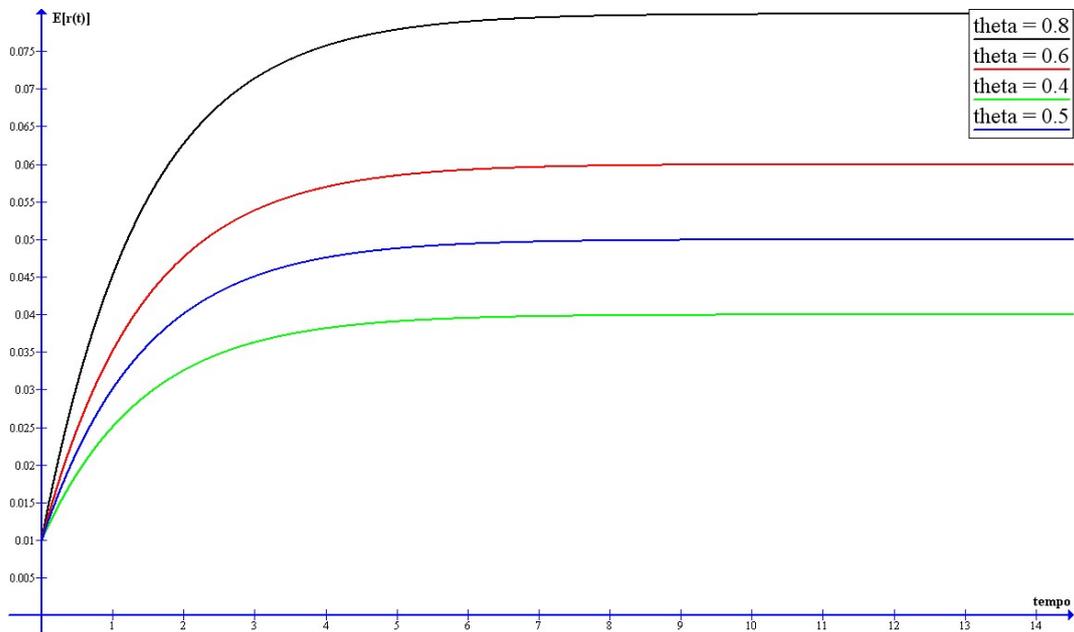


Figura 3.3: Sensibilidade do modelo de Vasicek relativamente ao parâmetro  $\theta$

### Sensibilidade da taxa de juro instantânea relativamente ao parâmetro $\sigma$

O estudo da sensibilidade do nosso modelo relativamente ao parâmetro  $\sigma$  é conseguido substituindo  $\sigma$  por um valor tão próximo quanto necessário  $\sigma + \delta_\sigma$ . De tal forma que a nossa versão discretizada da taxa de juro instantânea será dada por

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + k(\theta - r(t_i))\Delta t + (\sigma + \delta_\sigma)\sqrt{\Delta t}W_{i+1}. \quad (3.21)$$

A mudança na taxa de juro instantânea em uma unidade de discretização será portanto dada pela relação

$$\Delta_\sigma r(t_{i+1}) = r_\sigma(t_{i+1}) - r(t_{i+1}) = \delta_\sigma\sqrt{\Delta t}W_{i+1}. \quad (3.22)$$

Esta relação demonstra que, se variarmos  $\sigma$ , o próximo valor da taxa de juro instantânea sofre uma variação  $\delta_\sigma\sqrt{\Delta t}W_{i+1}$ .

Esta variação da taxa de juro instantânea poderá ser negativa ou positiva, dependendo do sinal relativo e conjunto de  $\delta_\sigma$  com  $W_{i+1}$ . O valor da variação está altamente dependente do termo de estocacidade.

A alteração do valor de  $\sigma$  não altera o valor esperado da taxa de juro, apesar de aumentar as possíveis variações em torno do valor esperado. A alteração deste parâmetro influenciará de modo mais significativo a determinação da taxa de juro instantânea a curto prazo do que a determinação da taxa de juro instantânea a longo prazo

$$E[r(t)_\sigma] = r(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) \quad (3.23)$$

$$Var[r(t)_\sigma] = \frac{(\sigma + \delta_\sigma)^2}{2k}(1 - e^{-2k(t-s)}) \quad (3.24)$$

$$E[r(t)_\sigma] - E[r(t)] = 0 \quad (3.25)$$

e

$$Var[r(t)_\sigma] - Var[r(t)] = \left(\frac{\delta\sigma^2 + 2\sigma\delta\sigma}{2k}\right)(1 - e^{-2k(t-s)}). \quad (3.26)$$

Daqui resulta que a variação na taxa de juro a longo prazo será

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[r(t)_\sigma] - E[r(t)] = 0 \quad (3.27)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Var[r(t)_\theta] - Var[r(t)] = \frac{\delta\sigma^2 + 2\sigma\delta\sigma}{2k}. \quad (3.28)$$

Ou seja, a alteração do valor de *sigma* altera o valor da variância da taxa de juro instantânea sem alterar o valor esperado da taxa de juro.

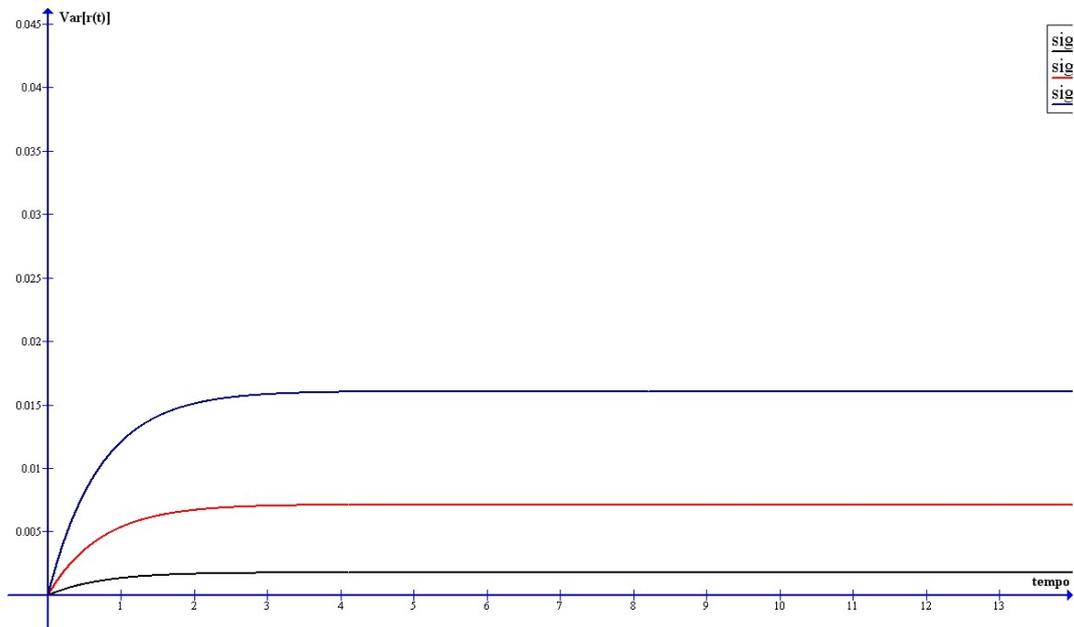


Figura 3.4: Sensibilidade do modelo de Vasicek relativamente ao parâmetro  $\sigma$

### 3.1.2 Sensibilidade do preço da obrigação de cupão zero relativamente aos diferentes parâmetros

No modelo de Vasicek, o valor da obrigação de cupão zero é dado pela relação

$$p(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)} \quad (3.29)$$

em que

$$A(t, T) = e^{(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2})(B(t, T) - T + t) - \frac{\sigma^2}{4k} B(t, T)^2} \quad (3.30)$$

$$B(t, T) = \frac{1}{k}(1 - e^{-k(T-t)}). \quad (3.31)$$

O método usado para perceber a forma como os diferentes parâmetros do modelo afectam o preço da obrigação do cupão zero consiste em assumir um valor fixo para dois dos três parâmetros, fazendo variar o terceiro parâmetro de forma a perceber o impacto que as variações do parâmetro têm no preço das obrigações de cupão zero num tempo fixo, mas com diferentes tempos de maturidade. Uma vez que uma análise de variações usando o método de Euler não permite obter resultados conclusivos, devido à complexidade das relações obtidas, vamos cingir-nos à análise numérica.

#### Sensibilidade da obrigação de cupão zero relativamente ao parâmetro $k$

Na análise de sensibilidade da obrigação de cupão zero relativamente ao parâmetro  $k$ , importa distinguir duas classes de resultados de influência do parâmetro  $k$ . Vemos que a influência do parâmetro  $k$  é determinada de forma decisiva pelo maior ou menor valor de  $\sigma$ . Para menores valores de  $\sigma$ ,  $k$  tem uma influência menor no preço das obrigações de cupão zero do que para elevados valores de  $\sigma$ .

Aquilo que conseguimos observar é que quando o parâmetro  $\sigma$  toma valores muito pequenos, a influência de  $k$  sobre o valor das obrigações de cupão zero é menosprezável.

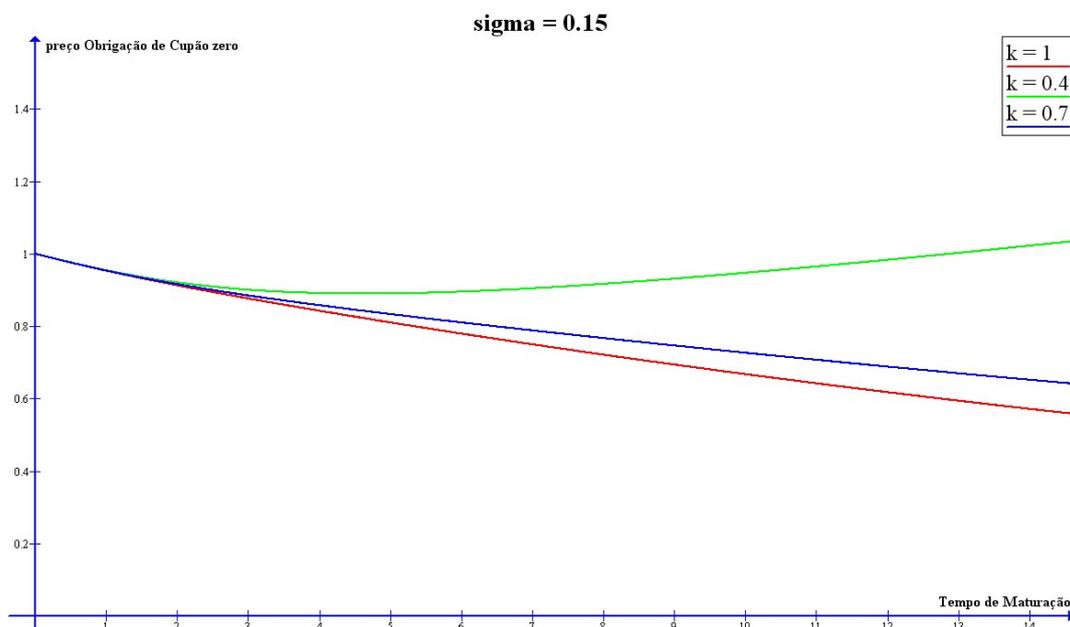


Figura 3.5: Sensibilidade do preço das obrigações de cupão zero relativamente ao parâmetro  $k$  para  $\sigma$  grande

Como facilmente podemos constatar pela figura 3.6, para o parâmetro  $\sigma$  com um valor numérico pequeno, a influência do parâmetro  $k$  é muito reduzida: a um aumento de  $k$  corresponde uma diminuição do valor da obrigação de cupão zero.

A análise da figura 3.5 permite perceber que, com o valor do parâmetro  $\sigma$  relativamente alto, a variação do parâmetro  $k$  origina elevadas variações no preço da obrigação.

Nesta situação é ainda possível perceber que, para valores de  $k$  muito pequenos e elevado  $\sigma$ , o valor da obrigação torna-se maior que 1. Este facto deve-se a o modelo de Vasicek permitir a obtenção de taxas de juro negativas nestas condições. Para  $k$  pequenos, a probabilidade de obtenção de taxas de juro negativas é alta, sendo este facto reforçado por uma volatilidade alta ( $\sigma$  alto). Para valores elevados de  $k$ , a probabilidade da existência de taxas de juro negativas é desprezável, pelo que os preços das obrigações serão necessariamente menores que um.

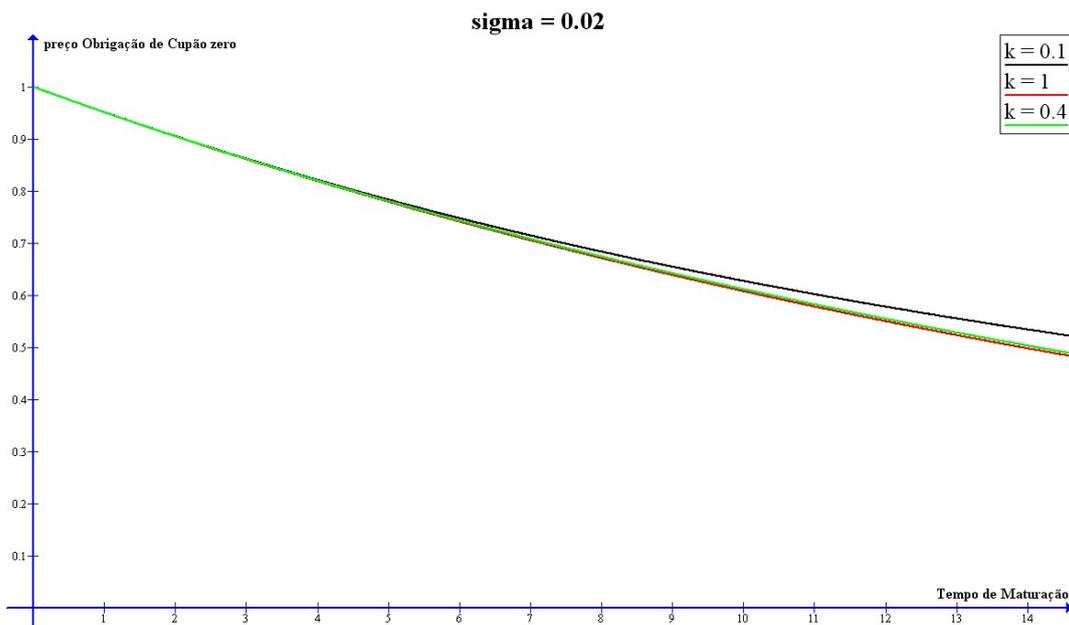


Figura 3.6: Sensibilidade do preço das obrigações de cupão zero relativamente ao parâmetro  $k$  para  $\sigma$  pequeno

### Sensibilidade da obrigação de cupão zero relativamente ao parâmetro $\theta$

A análise de sensibilidade do preço das obrigações relativamente ao parâmetro  $\theta$  é mais simples e mais linear do que aquela obtida para o parâmetro  $k$ . Nesta análise, verificamos imediatamente que uma variação do parâmetro  $\theta$  provoca um efeito directo no preço das obrigações, sendo que, quanto maior o nosso parâmetro  $\theta$ , menor o preço das obrigações (cf. Figura 2.7). Ou seja, quanto maior o valor da taxa de juro a longo prazo ( $\theta$ ), menor o valor a pagar para garantir em  $T$  uma unidade de dinheiro, e maior a valorização. Temos ainda de realçar que valores pequenos de  $\theta$  implicam uma possibilidade não desprezável de taxas de juro negativas (modelo de Vasicek) pelo que existe a possibilidade de obtermos preços de obrigações com valor superior a 1.

### Sensibilidade da obrigação de cupão zero relativamente ao parâmetro $\sigma$

A análise de sensibilidade do preço das obrigações relativamente ao parâmetro  $\sigma$  permite concluir que, a valores mais pequenos para o parâmetro  $\sigma$  correspondem preços de obrigação menores. Ou seja, sendo menor a incerteza associada à taxa de juro,

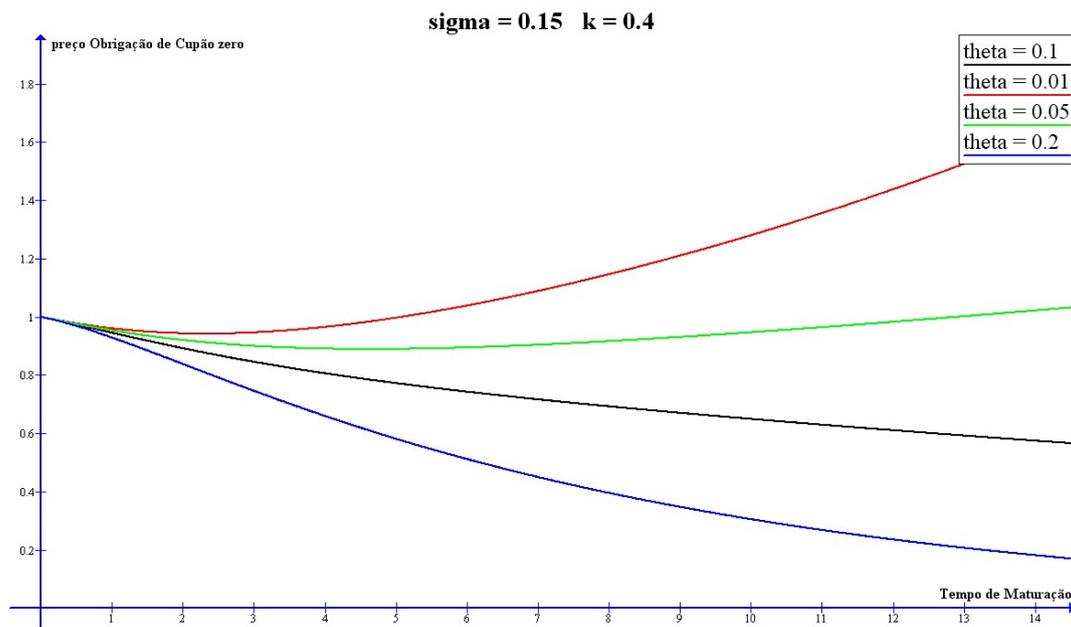


Figura 3.7: Sensibilidade do preço das obrigações de cupão zero relativamente ao parâmetro  $\theta$

menor será também o valor a pagar para garantir em  $T$  uma unidade de dinheiro. Concluímos também que a resposta do preço das obrigações relativamente a pequenas alterações do valor do parâmetro, é variada, podendo afirmar-se que variações pequenas, com  $\sigma$  grande, provocam uma maior alteração no preço das obrigações do que variações pequenas, com  $\sigma$  pequeno. Mais uma vez, também temos que notar que valores de  $\sigma$  elevados favorecem a existência de probabilidade de ocorrência de taxas de juro negativas, pelo que surgiram preços de obrigações maiores que 1.

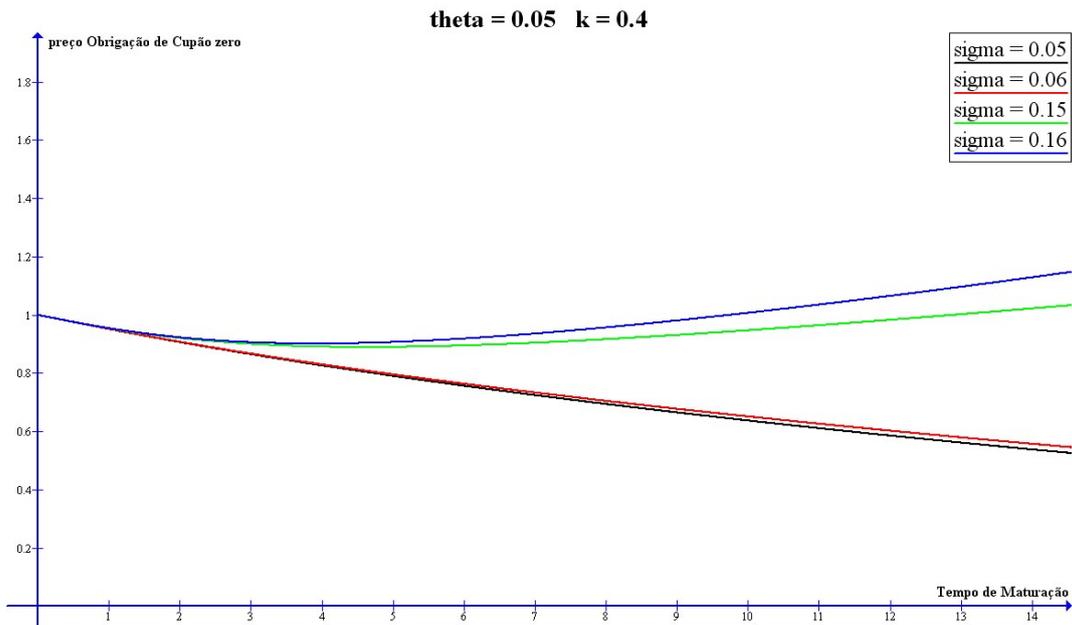


Figura 3.8: Sensibilidade do preço das obrigações de cupão zero relativamente ao parâmetro  $\sigma$

### 3.1.3 Sensibilidade da taxa LIBOR relativamente aos diferentes parâmetros do modelo

Como já vimos anteriormente, a taxa LIBOR pode ser escrita como uma relação dos preços de obrigação de cupão zero, pelo que deverá ser sensível aos mesmos parâmetros que as obrigações de cupão zero

$$L(T, S) = \frac{1}{S - T} \frac{p(t, T) - p(t, S)}{p(t, S)}. \quad (3.32)$$

O método usado para perceber a forma como os diferentes parâmetros do modelo afectam o valor da taxa LIBOR consiste em assumir um valor fixo para dois dos três parâmetros, fazendo variar o terceiro parâmetro de forma a perceber o impacto que as variações do parâmetro têm no valor da taxa LIBOR num tempo fixo mas com diferentes tempos de maturidade. Uma vez que uma análise de variações usando o método de Euler não permite obter resultados de fácil tratabilidade vamos cingir-nos à análise numérica.

### Sensibilidade do valor da taxa LIBOR relativamente ao parâmetro $k$

Na análise de sensibilidade do valor da taxa LIBOR relativamente ao parâmetro  $k$  importa distinguir duas classes de resultados e de influência do parâmetro  $k$ . Vemos que a influência do parâmetro  $k$  é determinada de forma decisiva pelo maior ou menor valor de  $\sigma$ . Para menores valores de  $\sigma$ , variações do parâmetro  $k$  produzem maiores variações no valor da taxa LIBOR do que para elevados valores de  $\sigma$ .

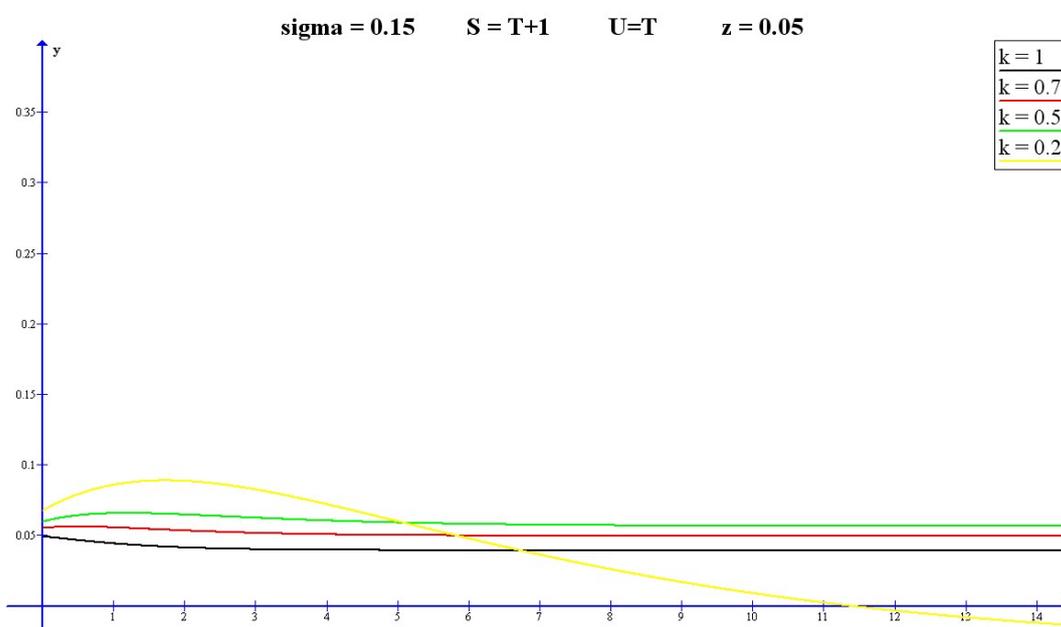


Figura 3.9: Sensibilidade do valor da taxa LIBOR relativamente ao parâmetro  $k$  para  $\sigma$  grande

Como facilmente podemos constatar pela figura 3.10, para o parâmetro  $\sigma$  com um valor numérico pequeno, variações do parâmetro  $k$  produzem grandes variações no valor da taxa LIBOR.

A análise da figura 3.9 permite perceber que, com o valor do parâmetro  $\sigma$  relativamente alto, a variação do parâmetro  $k$  origina pequenas variações no valor da taxa LIBOR.

Nesta situação é ainda possível perceber que, para valores de  $k$  muito pequenos e elevado  $\sigma$ , o valor da taxa LIBOR torna-se negativo. Este facto deve-se a o modelo de Vasicek

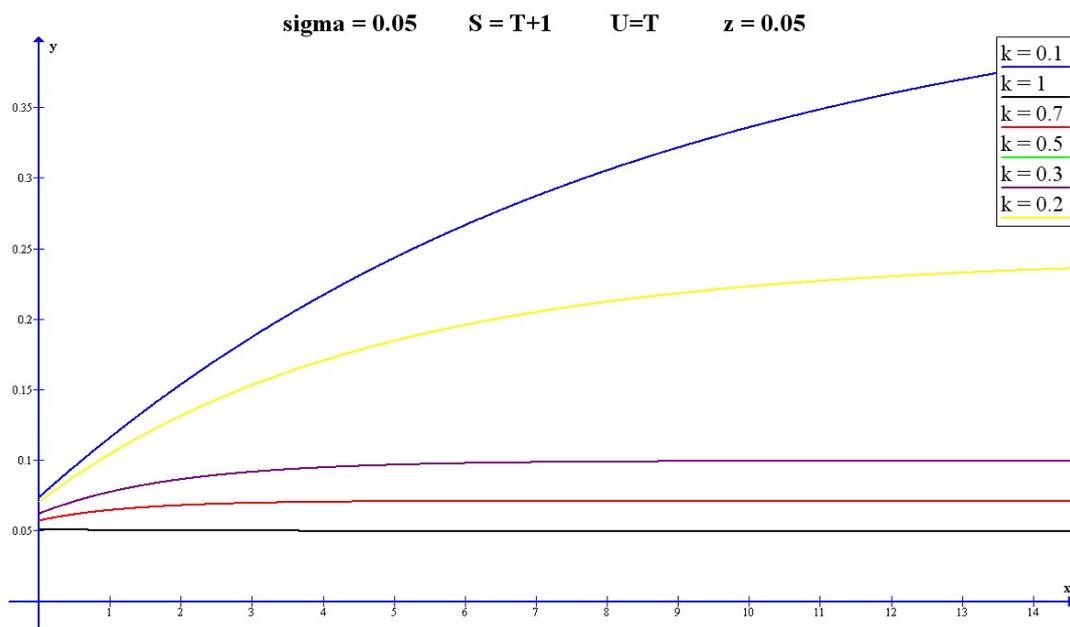


Figura 3.10: Sensibilidade do do valor da taxa LIBOR relativamente ao parâmetro  $k$  para  $\sigma$  pequeno

permitir a obtenção de taxas de juro negativas nestas condições. Para  $k$  pequenos, a probabilidade de obtenção de taxas de juro negativas é alta, sendo este facto reforçado por uma volatilidade alta ( $\sigma$  alto). Para valores elevados de  $k$ , a probabilidade da existência de taxas de juro negativas é desprezável pelo que a probabilidade de existência de taxas LIBOR negativas é igualmente desprezável.

Podemos ainda evidenciar que, quanto menor o valor do parâmetro  $k$ , maior o valor da taxa LIBOR obtida. Ou seja, quanto mais lenta a convergência entre a taxa instantânea actual e a taxa instantânea a longo prazo, maior o valor da taxa LIBOR, logo, maior a retribuição esperada porque maior o risco associado.

### Sensibilidade do valor da taxa LIBOR relativamente ao parâmetro $\theta$

A análise de sensibilidade do valor da taxa LIBOR relativamente ao parâmetro  $\theta$  é mais simples e mais linear do que aquela obtida para o parâmetro  $k$ . Nesta análise verificamos que uma variação do parâmetro  $\theta$  provoca um efeito directo no valor da taxa LIBOR: quanto maior o nosso parâmetro  $\theta$  maior o valor da taxa LIBOR (cf.

Figura 3.11). Ou seja, quanto maior o valor de longo prazo da taxa instantânea, maior o valor da taxa LIBOR. Temos ainda de realçar que valores pequenos de  $\theta$  implicam uma possibilidade não desprezável de taxas de juro negativas (modelo de Vasicek) pelo que existe a possibilidade de obtermos valores da taxa LIBOR negativos.

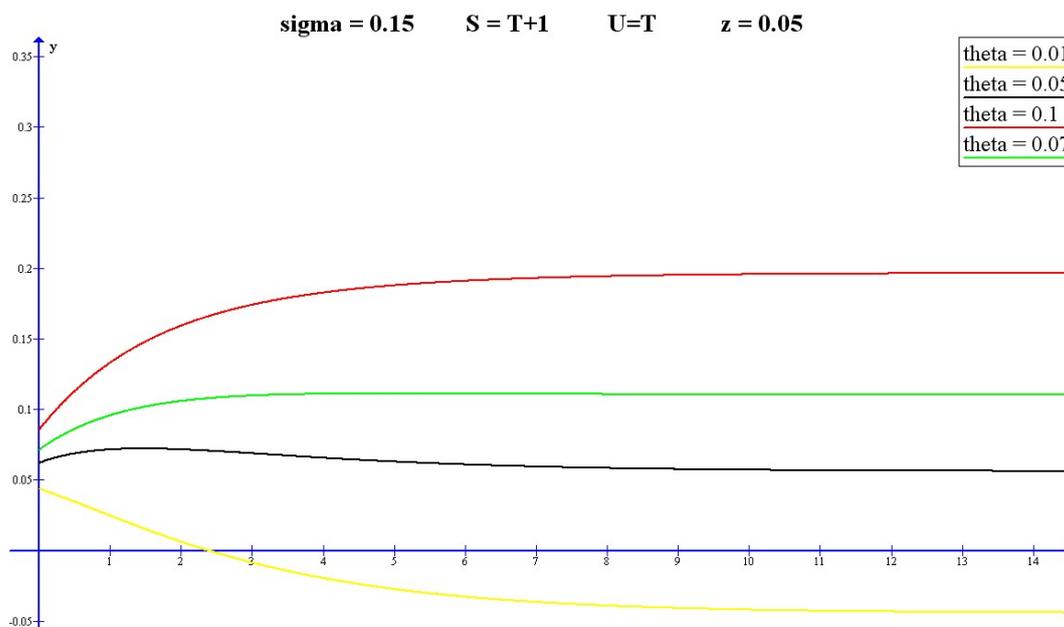


Figura 3.11: Sensibilidade do valor da taxa LIBOR relativamente ao parâmetro  $\theta$

### Sensibilidade do valor da taxa LIBOR relativamente ao parâmetro $\sigma$

A análise de sensibilidade do valor da taxa LIBOR relativamente ao parâmetro  $\sigma$  permite concluir que a valores maiores do parâmetro  $\sigma$  correspondem valores menores para a taxa LIBOR. Ou seja, quanto maior a volatilidade, menor o valor da taxa LIBOR. Concluímos também que a resposta do valor da taxa LIBOR relativamente a pequenas alterações do valor do parâmetro é variada, podendo afirmar-se que variações pequenas, com  $\sigma$  grande, provocam uma maior alteração no preço das obrigações do que variações pequenas, em  $\sigma$  pequeno.

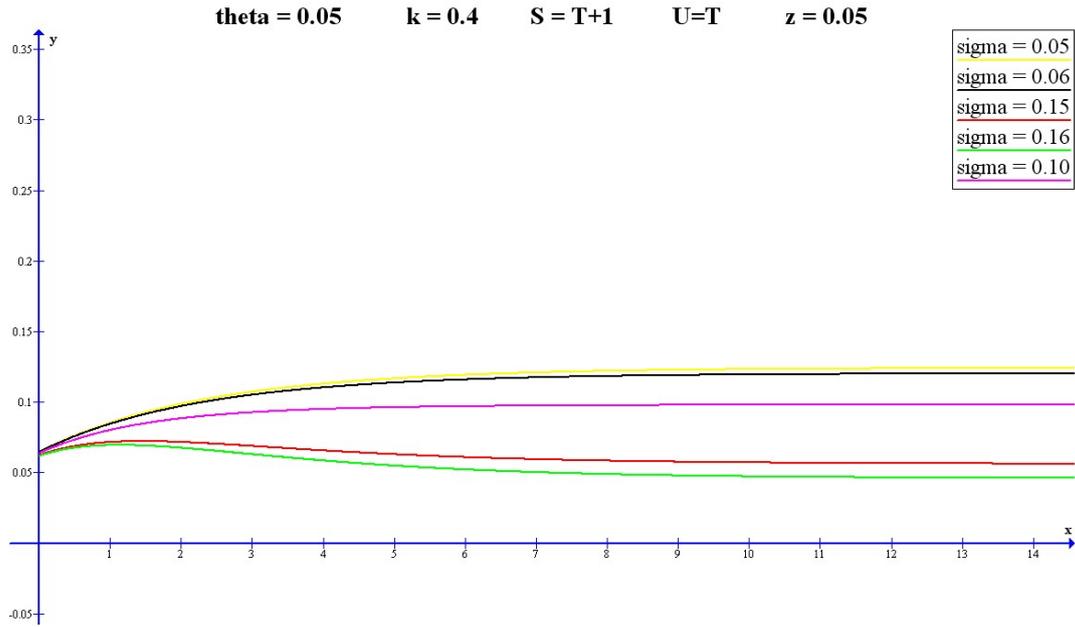


Figura 3.12: Sensibilidade do valor da taxa LIBOR relativamente ao parâmetro  $\sigma$

### 3.1.4 Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente aos diferentes parâmetros do modelo

Como já vimos anteriormente, o ajuste de convexidade das taxas LIBOR é dado pela relação

$$CC_a(t, T, U, S) = E_t^U(L(T, S)) - L(t, T, S), \quad (3.33)$$

ou seja,

$$CC_a(t, T, U, S) = \frac{1}{S - T} \frac{p(t, T)}{p(t, S)} (e^{F(t, T, U, S) + G(t, T, U, S)z_t} - 1) \quad (3.34)$$

em que  $F$  e  $G$  são funções deterministas de  $(t, T, U, S)$  dadas pelo sistema de equações diferenciais

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (B(t, S) - B(t, U))k_0(t)(B(t, T) - B(t, S)) + Gd(t) - Gk_0(t)B(t, U) +$$

$$\frac{1}{2}Gk_0(t)G + Gk_0(t)(B(t, T) - B(t, S)) = 0$$

$$F(T; T, U, S) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} + (B(t, S) - B(t, U))K(t)(B(t, T) - B(t, S)) + GE(t) - GK(t)B(t, U) + \\ \frac{1}{2}GK(t)G + GK(t)(B(t, T) - B(t, S)) = 0 \end{aligned}$$

$$G(T; T, U, S) = 0.$$

Conseguimos, deste modo, obter, com base no recente trabalho de Gaspar e Murgoci (no prelo), o ajuste de convexidade como solução de um sistema de equações diferenciais para o modelo de taxa de juro com estrutura temporal afim proposto por Vasicek.

Sabemos que o modelo proposto por Gaspar e Murgoci (no prelo) é válido para o modelo de Vasicek em que  $E(t) = -k$ ,  $k(t) = 0$ ,  $k_0(t) = \sigma^2$  e  $d(t) = \theta$ .

Neste caso, o nosso sistema de equações diferenciais que permite determinar  $F$  e  $G$  é

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + (B(t, S) - B(t, U))\sigma^2(B(t, T) - B(t, S)) + G\theta - G\sigma^2B(t, U) + \frac{1}{2}G\sigma^2G + \\ G\sigma^2(B(t, T) - B(t, S)) = 0 \end{aligned}$$

$$F(T; T, U, S) = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} - Gk = 0$$

$$G(T; T, U, S) = 0,$$

o que permite concluir, tendo em conta a condição fronteira, que:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (B(t, S) - B(t, U))\sigma^2(B(t, T) - B(t, S)) = 0$$

$$F(T; T, U, S) = 0$$

$$G(t; T, U, S) = 0,$$

o que, resolvendo o sistema de equações, permite obter uma relação formal perfeitamente definida para as nossas funções  $F(t, T, U, S)$  e  $G(t, T, U, S)$

$$F(t, T, U, S) = \frac{1}{2k^3} e^{-2kt} (e^{-kS} - e^{-kU}) \sigma^2 (e^{-kT} - e^{-kS}) - \frac{1}{2k^3} e^{-2kT} (e^{-kS} - e^{-kU}) \sigma^2 (e^{-kT} - e^{-kS})$$

$$G(t; T, U, S) = 0$$

Partindo da relação obtida ou partindo da solução numérica baseada no algoritmo de resolução do problema (cf. Anexo I), é possível realizar uma análise de sensibilidade relativamente aos parâmetros do modelo.

A necessidade de entendimento detalhado da influência de cada um dos parâmetros no valor do ajuste de convexidade impõe que a análise seja feita de duas formas distintas mas complementares. Vimos, através do trabalho de Gaspar e Murgoci (no prelo), que o cálculo do ajuste de convexidade para modelos com estrutura temporal afim era feito através do cálculo e análise de duas funções auxiliares: a função  $G(t, T, U, S)$ , que provámos ser sempre nula para o cálculo de ajustes de convexidade para o modelo de Vasicek e a função  $F(t, T, U, S)$  que obtivemos analiticamente. Iremos deste modo centrar a nossa atenção na análise de sensibilidade da função auxiliar  $F(t, T, U, S)$  e, partindo desta análise, procederemos a uma análise de sensibilidade detalhada do ajuste de convexidade de taxas LIBOR.

### **Estudo de sensibilidade da função $F(t, T, U, S)$**

Ao procedermos à análise de sensibilidade, o primeiro facto que surge é a independência da função  $F(t, T, U, S)$  relativamente ao parâmetro  $\theta$ . Ou seja, a função  $F(t, T, U, S)$  não possui uma dependência explícita relativamente ao limite da taxa de juro instantânea. Este facto permite concluir que uma qualquer dependência do ajuste de convexidade

relativamente ao parâmetro  $\theta$  será devida a uma dependência do preço das obrigações relativamente a este parâmetro.

Da análise de sensibilidade da função  $F(t, T, U, S)$  relativamente ao parâmetro  $k$  resultam dois resultados importantes: (1) a parâmetros  $k$  com menores valores resultam funções  $F(0, T, U, S)$  com maiores valores; (2) para menores valores de  $k$ , pequenas variações produzem maiores variações de  $F(0, T, U, S)$  do que pequenas variações de  $k$  para maiores valores de  $k$ . Ou seja, quanto menor for a velocidade de convergência da taxa de juro instantânea relativamente ao seu limite de longo prazo maior a contribuição da função  $F(t, T, U, S)$  para o ajuste de convexidade.

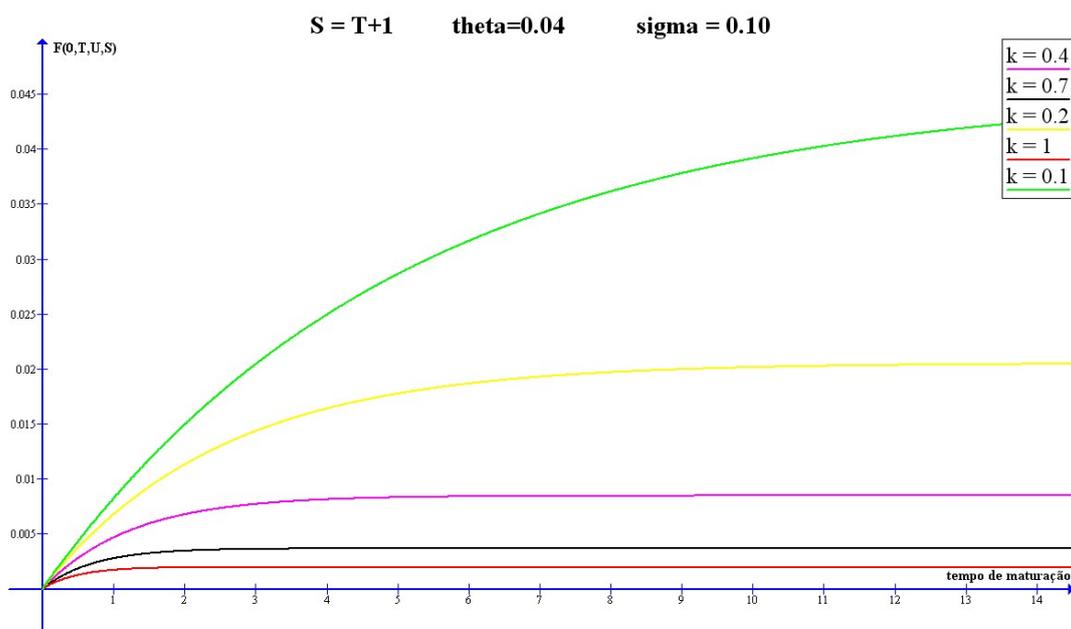


Figura 3.13: Sensibilidade da função  $F(t, T, U, S)$  relativamente ao parâmetro  $k$

Da análise de sensibilidade da função  $F(t, T, U, S)$  relativamente ao parâmetro  $\sigma$  surgem dois resultados: (1) de parâmetros  $\sigma$  com maiores valores resultam funções  $F(0, T, U, S)$  com maiores valores; (2) para maiores valores de  $\sigma$ , pequenas variações produzem maiores variações de  $F(0, T, U, S)$  do que pequenas variações de  $\sigma$  em menores valores de  $k$ . Ou seja, quanto maior for a volatilidade associada à taxa de juro instantânea, maior será

contribuição da função  $F(t, T, U, S)$  para o ajuste de convexidade.

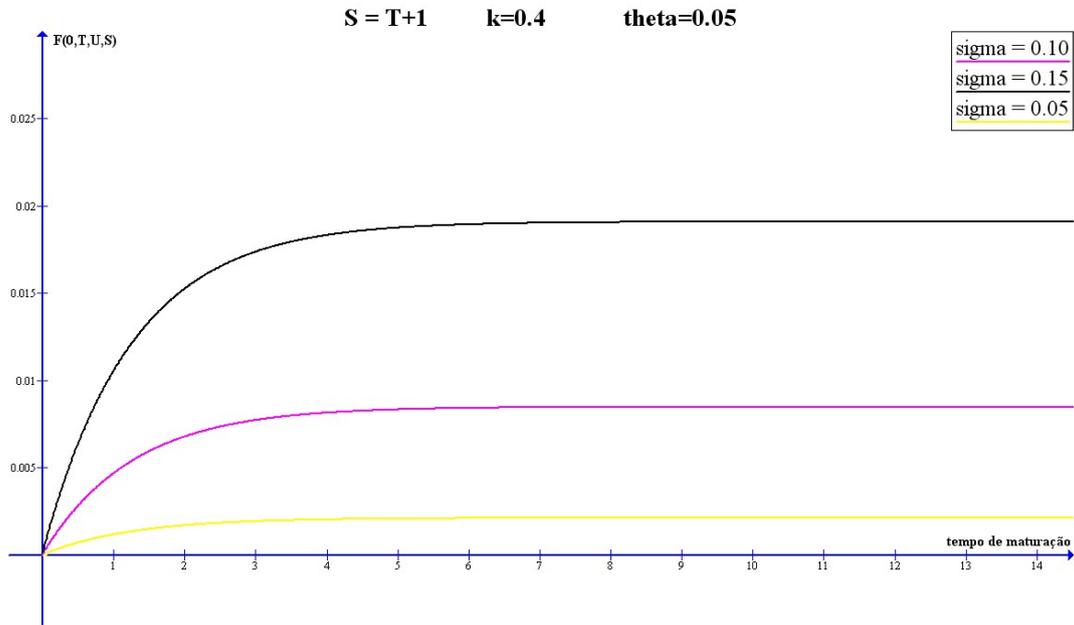


Figura 3.14: Sensibilidade da função  $F(t, T, U, S)$  relativamente ao parâmetro  $\sigma$

Da análise de sensibilidade da função  $F(t, T, U, S)$  relativamente à diferença  $S - T$  podemos concluir que: (1) quanto maior o valor da diferença de  $S - T$ , maior o valor da função  $F(0, T, U, S)$  e (2) variações iguais em torno da diferença  $S - T$  produzem variações iguais no valor da função  $F(0, T, U, S)$ . Ou seja, quanto maior for a diferença  $S - T$ , maior será contribuição da função  $F(t, T, U, S)$  para o ajuste de convexidade.

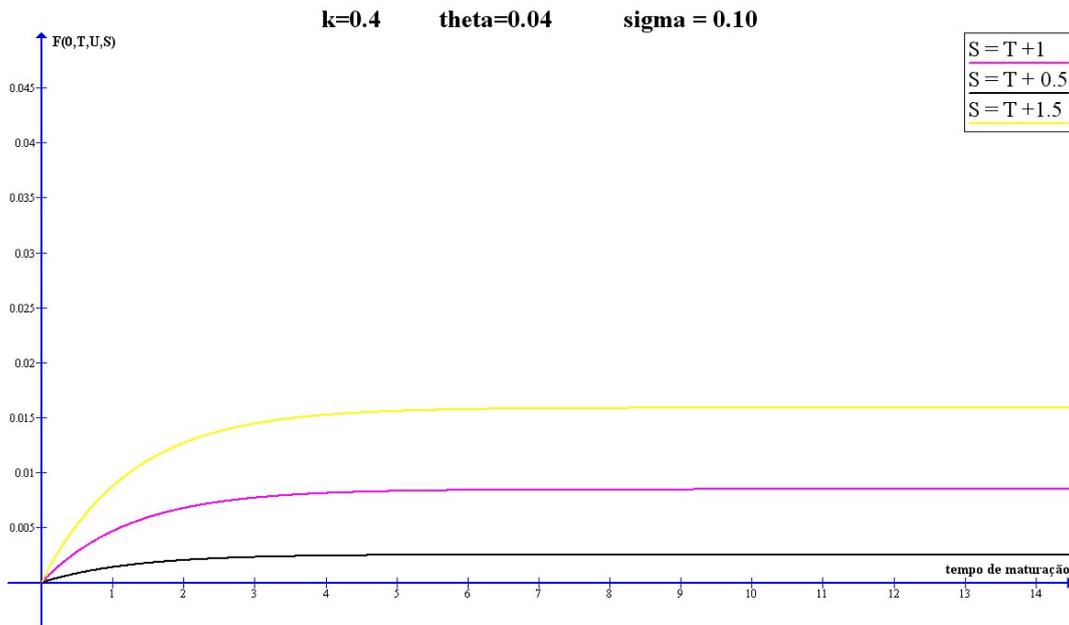


Figura 3.15: Sensibilidade da função  $F(t, T, U, S)$  relativamente à diferença  $S_T$

### Estudo de sensibilidade do ajuste de convexidade de taxas LIBOR

Como já vimos anteriormente, o ajuste de convexidade de taxas LIBOR é dado pela relação

$$CC_a(t, T, U, S) = \frac{1}{S-T} \frac{p(t,T)}{p(t,S)} (e^{F(t,T,U,S)+G(t,T,U,S)z_t} - 1).$$

O estudo de sensibilidade do ajuste de convexidade foi realizado procedendo a duas classes de análise diferentes. Para cada um dos parâmetros do modelo foi realizada uma análise de sensibilidade relativamente ao ajuste de convexidade e uma análise de sensibilidade relativamente a aquilo que se optou por chamar peso relativo do ajuste de convexidade.

O peso relativo de ajuste de convexidade surge como medida da contribuição da correcção do ajuste de convexidade para o valor expectável da taxa LIBOR, numa medida forward-U, com  $T \leq U \leq S$ . Ou seja, como

$$\frac{CC_a(t, T, U, S)}{E_t^U(L(T, S))} \tag{3.35}$$

em que

$$CC_a(t, T, U, S) = E_t^U(L(T, S)) - L(t, T, S). \quad (3.36)$$

Da análise de sensibilidade do ajuste de convexidade  $CC_a(t, T, U, S)$  relativamente ao parâmetro  $\theta$  conclui-se que existe uma relação de proporcionalidade entre  $\theta$  e o ajuste de convexidade, sendo que o parâmetro  $k$  influencia de forma directa o resultado de variações do parâmetro  $\theta$ , quanto menor o parâmetro  $k$ , mais as variações no parâmetro  $\theta$  produzem variações no ajuste de convexidade. Uma vez que a função auxiliar  $F(t, T, U, S)$  não depende directamente do parâmetro  $\theta$ , a dependência relativamente a  $\theta$  é o resultado da dependência do preço das obrigações expresso na nossa relação do ajuste de convexidade por  $\frac{p(t, T)}{p(t, S)}$ . Quanto maior o valor da taxa de juro instantânea a longo prazo, maior o valor absoluto do ajuste de convexidade à taxa LIBOR.

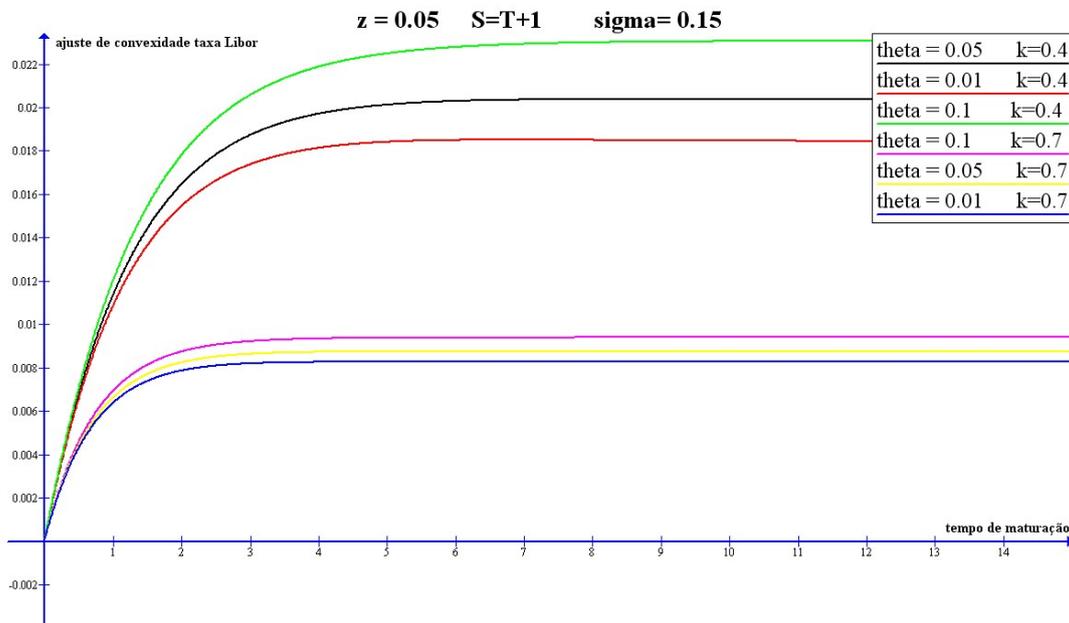


Figura 3.16: Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente ao parâmetro  $\theta$

Da análise de sensibilidade relativamente ao peso relativo do ajuste de convexidade resulta que, quanto menor o parâmetro  $\theta$ , maior a correcção introduzida pelo ajuste de convexi-

dade. Logo, maior a relevância financeira deste ajuste na determinação do valor da taxa LIBOR.

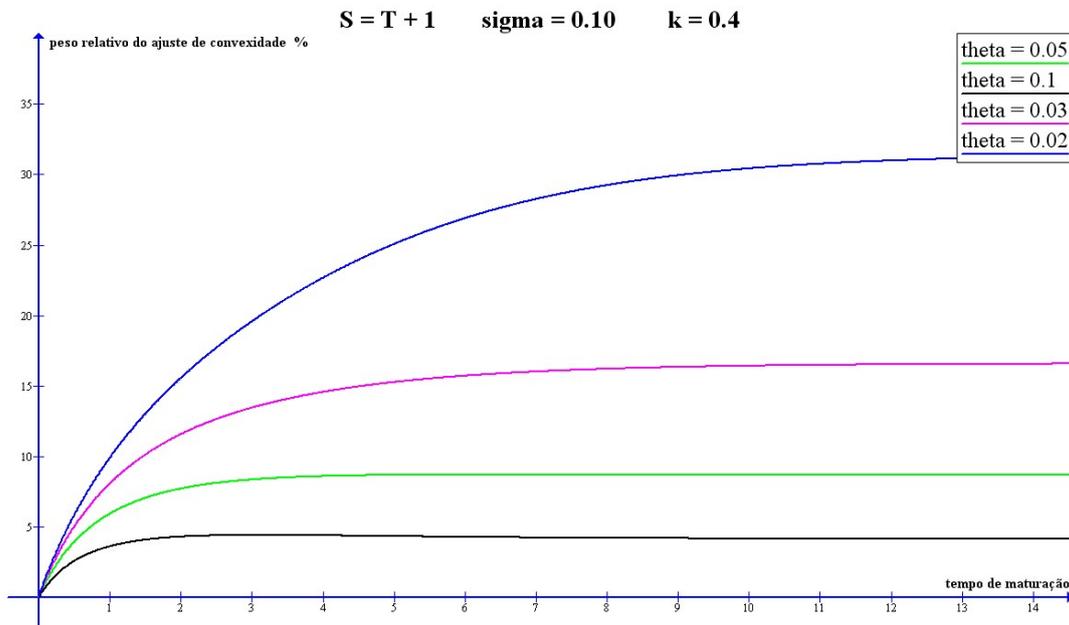


Figura 3.17: Sensibilidade do peso relativo de ajuste de convexidade relativamente ao parâmetro  $\theta$

Da análise de sensibilidade do ajuste de convexidade  $CC_a(t, T, U, S)$  relativamente ao parâmetro  $k$  conclui-se que, quanto maior  $k$ , menor o ajuste de convexidade. Esta dependência também se mantém quando analisado o peso relativo de ajuste do convexidade relativamente ao parâmetro  $k$ , porque quanto menor  $k$  maior a correção introduzida pelo ajuste de convexidade. Logo, maior a relevância financeira deste ajuste na determinação do valor da taxa LIBOR.

Da análise de sensibilidade do ajuste de convexidade  $CC_a(t, T, U, S)$  relativamente ao parâmetro  $\sigma$  conclui-se que, quanto maior  $\sigma$ , maior o ajuste de convexidade. Esta dependência também se mantém quando analisado o peso relativo do ajuste de convexidade relativamente ao parâmetro  $\sigma$ , porque quanto maior o valor de  $\sigma$  maior a correção introduzida pelo ajuste de convexidade. Logo, maior a relevância financeira deste ajuste na

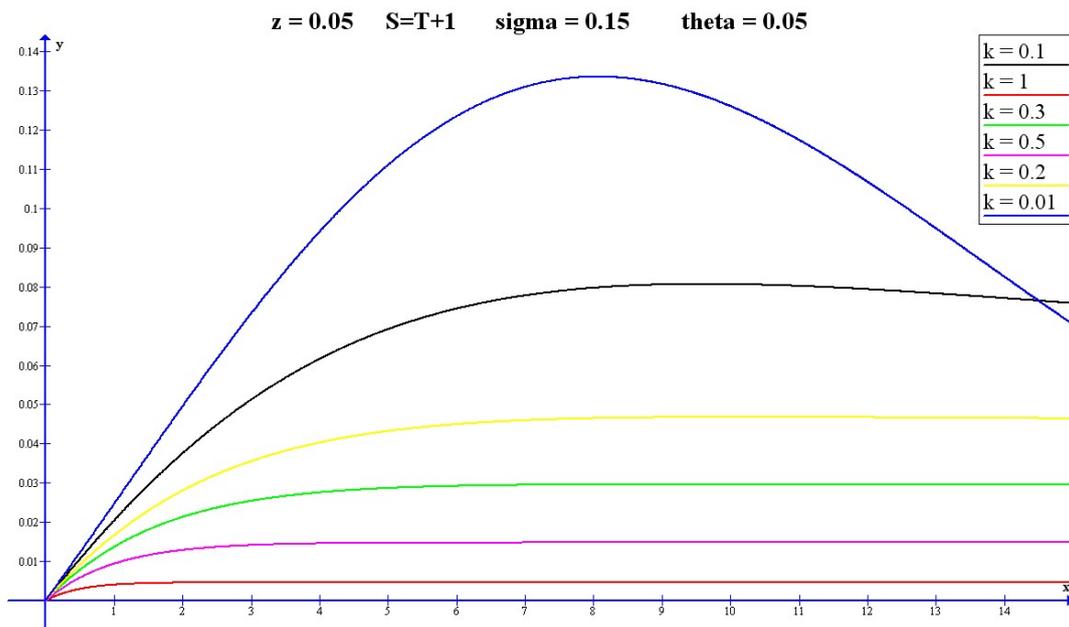


Figura 3.18: Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente ao parâmetro  $k$

determinação do valor da taxa LIBOR.

Da análise de sensibilidade do ajuste de convexidade  $CC_a(t, T, U, S)$  relativamente à diferença  $S - T$  conclui-se que, quanto maior a diferença  $S - T$ , maior o ajuste de convexidade. Esta dependência também se mantém quando analisado o peso relativo de ajuste de convexidade relativamente à diferença  $S - T$ , porque quanto maior o valor da diferença  $S - T$  maior a correcção introduzida pelo ajuste de convexidade. Logo, maior a relevância financeira deste ajuste na determinação do valor da taxa LIBOR.

## 3.2 O modelo de CIR

Propomo-nos nesta secção estudar e perceber a influência dos parâmetros intervenientes no modelo de CIR na determinação do valor da taxa de juro instantânea, das obrigações de cupão zero, da taxa LIBOR e do ajuste de convexidade da taxa LIBOR.

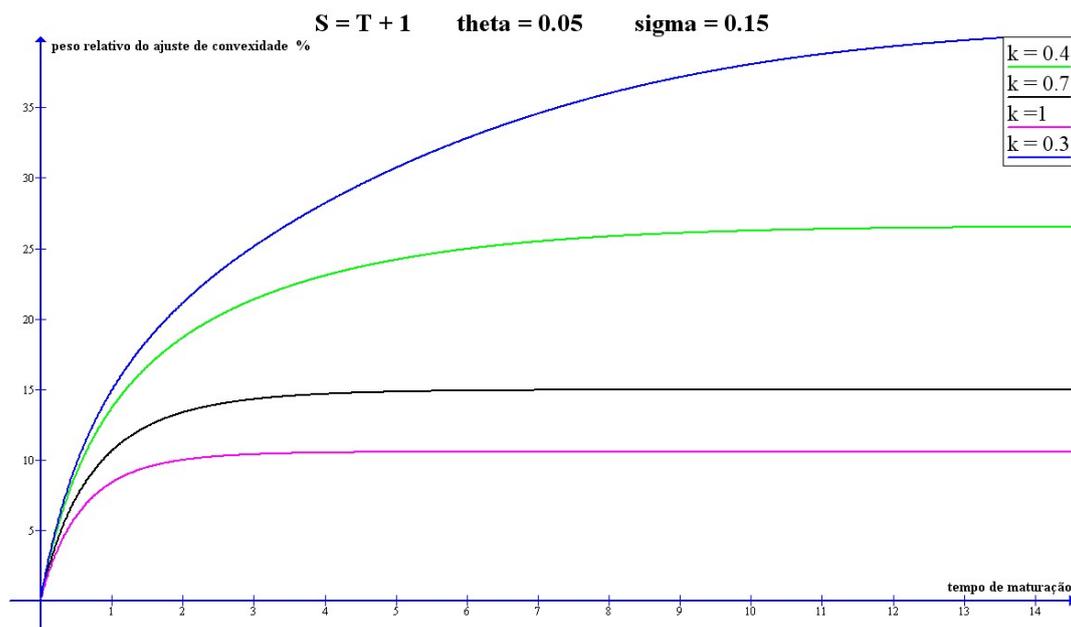


Figura 3.19: Sensibilidade do peso relativo de ajuste de convexidade relativamente ao parâmetro  $k$

### 3.2.1 Sensibilidade da taxa de juro instantânea relativamente aos diferentes parâmetros

Como já tomámos conhecimento anteriormente, o modelo de CIR apresenta como equação dinâmica para a modelação do comportamento da taxa de juro instantânea a relação

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \quad (3.37)$$

em que  $k$   $\theta$   $\sigma$  são constantes cujo valor depende dos dados do mercado que pretendemos simular. Estes parâmetros podem por isso ser vistos como os parâmetros de modelação do nosso sistema e serão eles os parâmetros relativamente aos quais importa perceber a influência.

Se procedermos à discretização da equação dinâmica da taxa de juro instantânea proposta por CIR, usando o método de Euler, chegamos à equação

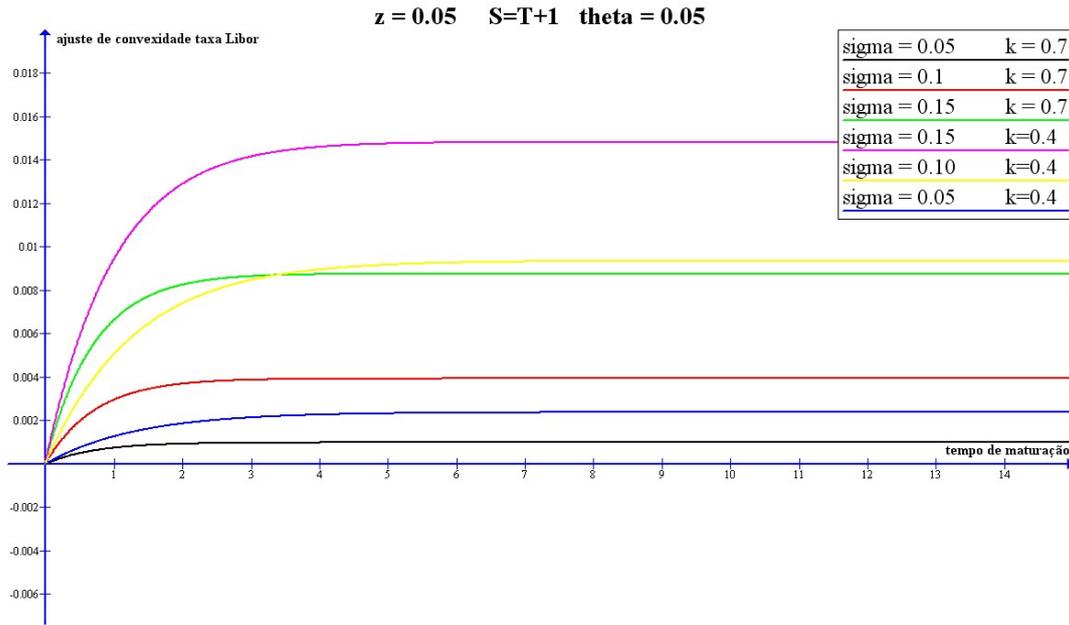


Figura 3.20: Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente ao parâmetro  $\sigma$

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + k(\theta - r(t_i))\Delta t + \sigma \sqrt{r(t_i)} \sqrt{\Delta t} W_{i+1}. \quad (3.38)$$

### Sensibilidade da taxa de juro instantânea relativamente ao parâmetro $k$

O estudo da sensibilidade do nosso modelo relativamente ao parâmetro  $k$  é conseguido substituindo  $k$  por um valor tão próximo quanto necessário  $k + \delta_k$ . De tal forma que a nossa versão discretizada da taxa de juro instantânea será dada por

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + (k + \delta_k)(\theta - r(t_i))\Delta t + \sigma \sqrt{r(t_i)} \sqrt{\Delta t} W_{i+1}. \quad (3.39)$$

A mudança na taxa de juro instantânea em uma unidade de discretização será portanto dada pela relação

$$\Delta_k r(t_{i+1}) = r_k(t_{i+1}) - r(t_{i+1}) = \delta_k(\theta - r(t_i))\Delta t. \quad (3.40)$$

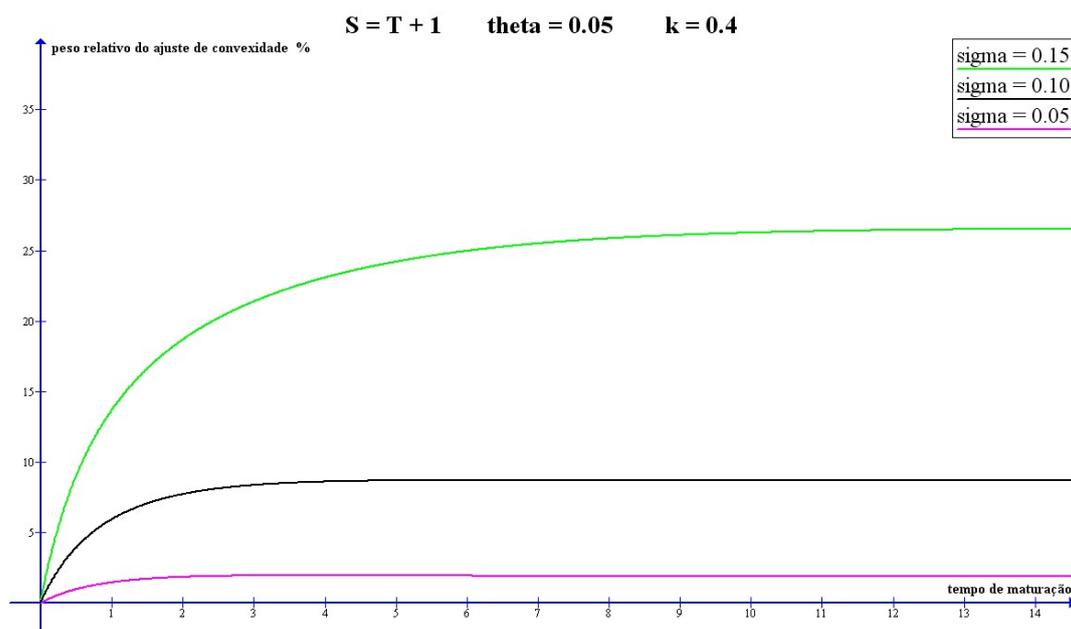


Figura 3.21: Sensibilidade do peso relativo de ajuste de convexidade relativamente ao parâmetro  $\sigma$

Esta relação demonstra que, se variarmos  $k$ , o próximo valor da taxa de juro instantânea sofre uma variação  $\delta_k(\theta - r(t_i))\Delta t$ .

Consideremos as duas variações possíveis do parâmetro  $k$ .

Se  $\delta_k > 0$ , obtemos duas classes de resultado possíveis:

(1) se a taxa instantânea actual  $r(t_i)$  possui um valor inferior ao da taxa instantânea a longo prazo  $\theta$ , ou seja, se  $\theta - r(t_i) > 0$ , da variação do parâmetro  $k$  resultará uma aproximação mais rápida entre o valor da taxa instantânea actual  $r(t_i)$  e o valor da taxa instantânea a longo prazo  $\theta$

$$\theta - r(t_i) > 0 \mapsto \Delta_k r(t_{i+1}) > 0; \quad (3.41)$$

(2) se a taxa instantânea actual  $r(t_i)$  possui um valor superior ao da taxa instantânea a longo prazo  $\theta$ , ou seja, se  $\theta - r(t_i) < 0$ , da variação do parâmetro  $k$  resultará uma aproximação mais rápida entre o valor da taxa instantânea actual  $r(t_i)$  e o valor da taxa

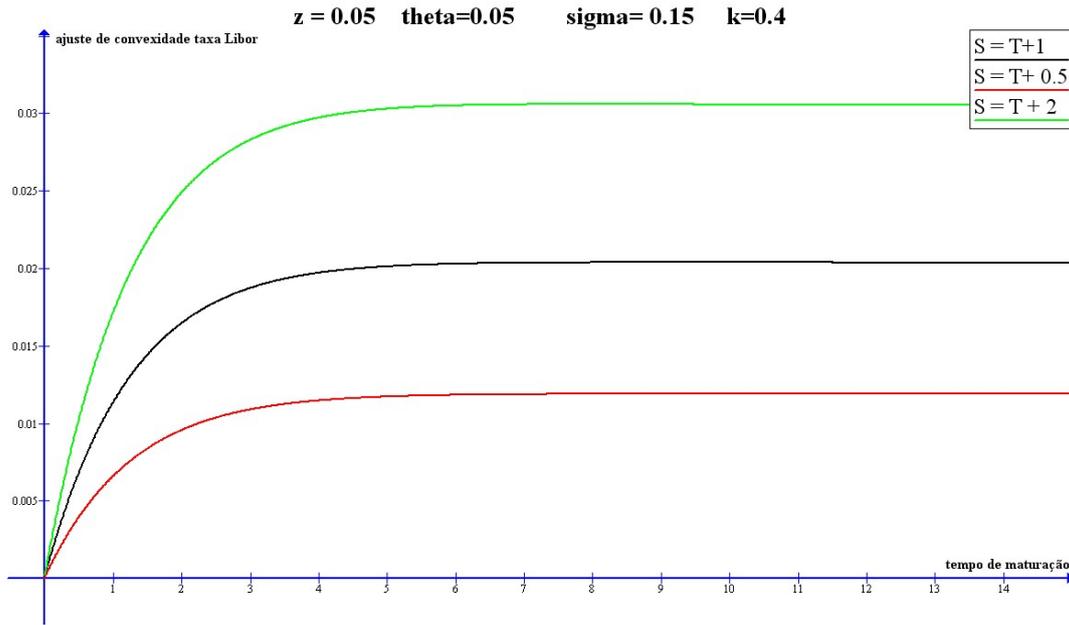


Figura 3.22: Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente à diferença  $S - T$

instantânea a longo prazo  $\theta$ ;

$$\theta - r(t_i) < 0 \mapsto \Delta_k r(t_{i+1}) < 0. \quad (3.42)$$

Se, por outro lado,  $\delta_k < 0$ , temos mais uma vez, duas classes de resultado possíveis:

(1) se a taxa instantânea actual  $r(t_i)$  possui um valor inferior ao da taxa instantânea a longo prazo  $\theta$ , ou seja, se  $\theta - r(t_i) > 0$ , da variação do parâmetro  $k$  resultará uma aproximação mais lenta entre o valor da taxa instantânea actual  $r(t_i)$  e o valor da taxa instantânea a longo prazo  $\theta$

$$\theta - r(t_i) > 0 \mapsto \Delta_k r(t_{i+1}) < 0; \quad (3.43)$$

(2) se a taxa instantânea actual  $r(t_i)$  possui um valor superior ao da taxa instantânea a longo prazo  $\theta$ , ou seja, se  $\theta - r(t_i) < 0$ , da variação do parâmetro  $k$  resultará uma aproximação mais lenta entre o valor da taxa instantânea actual  $r(t_i)$  e o valor da taxa instantânea a longo prazo  $\theta$

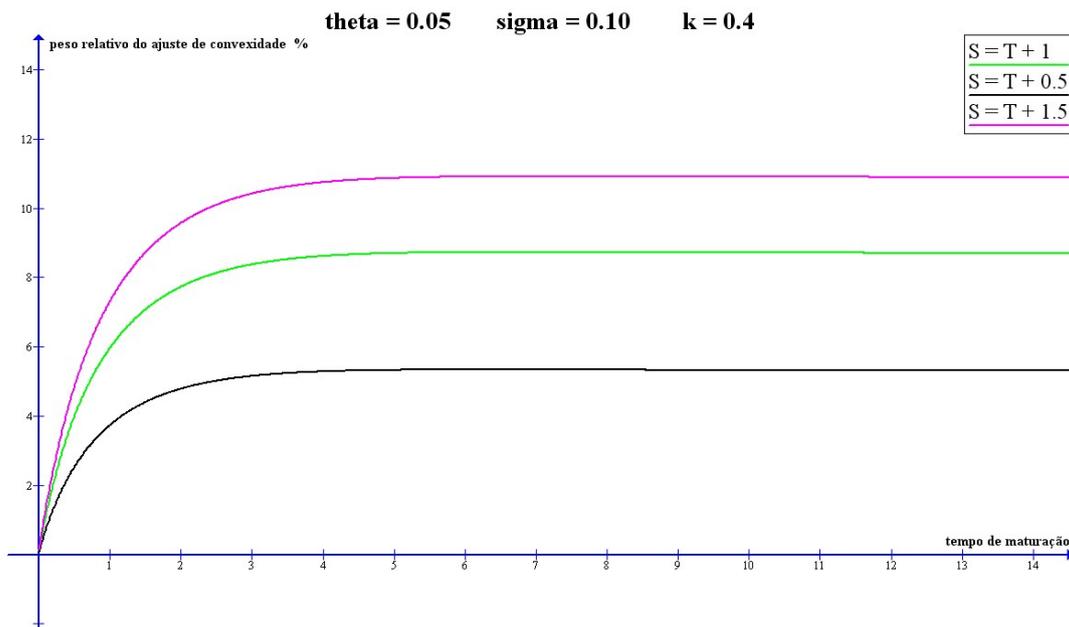


Figura 3.23: Sensibilidade do peso relativo de ajuste de convexidade relativamente à diferença  $S - T$

$$\theta - r(t_i) < 0 \mapsto \Delta_k r(t_{i+1}) > 0. \tag{3.44}$$

Desta análise resulta que o valor do parâmetro  $k$  não afecta o valor da taxa instantânea a longo prazo, mas possui uma influência decisiva sobre a velocidade com que se dá a convergência entre o valor actual da taxa instantânea e o valor da taxa instantânea a longo prazo.

Sabemos que o modelo proposto por CIR para a dinâmica da taxa de juro instantânea assume que à taxa de juro instantânea está associada uma distribuição Chi-quadrado não centrada caracterizada por um valor expectável

$$E[r(t)] = r(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) \tag{3.45}$$

e por uma variância

$$Var[r(t)] = \frac{\sigma^2}{k}(e^{-k(t-s)} - e^{-2k(t-s)}) + \theta \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2k(t-s)})^2. \quad (3.46)$$

Daqui concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[r(t)] = \theta \quad (3.47)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Var[r(t)] = \frac{\theta \sigma^2}{2k}. \quad (3.48)$$

Ou seja, o parâmetro  $k$  não influencia o valor esperado da taxa de juro instantânea a longo prazo mas influencia o valor esperado da variância da taxa de juro a longo prazo. Um aumento do parâmetro  $k$  em  $\delta k$  diminui a variância esperada, diminuindo a volatilidade associada. Ou seja, um aumento do parâmetro  $k$  implica uma maior taxa de convergência entre o valor actual da taxa de juro instantânea e o seu limite (taxa de juro instantânea a longo prazo) pelo que, necessariamente, teremos uma variância menor, uma volatilidade menor.

Permitimos-nos concluir que (1)  $k$  é um parâmetro importante na determinação de instrumentos financeiros que são afectados pela volatilidade; (2)  $k$  é um parâmetro que não influencia o valor esperado da taxa de juro a longo prazo mas que tem um papel importante na velocidade de convergência da taxa de juro actual relativamente à taxa de juro a longo prazo e (3)  $k$  é um parâmetro que influencia a variância da taxa de juro esperada.

### **Sensibilidade da taxa de juro instantânea relativamente ao parâmetro $\theta$**

O estudo da sensibilidade do nosso modelo relativamente ao parâmetro  $\theta$  é conseguido substituindo  $\theta$  por um valor tão próximo quanto necessário  $\theta + \delta\theta$ . De tal forma que a nossa versão discretizada da taxa de juro instantânea será dada por

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + k(\theta + \delta\theta - r(t_i))\Delta t + \sigma\sqrt{r(t_i)}\sqrt{\Delta t}W_{i+1} \quad (3.49)$$

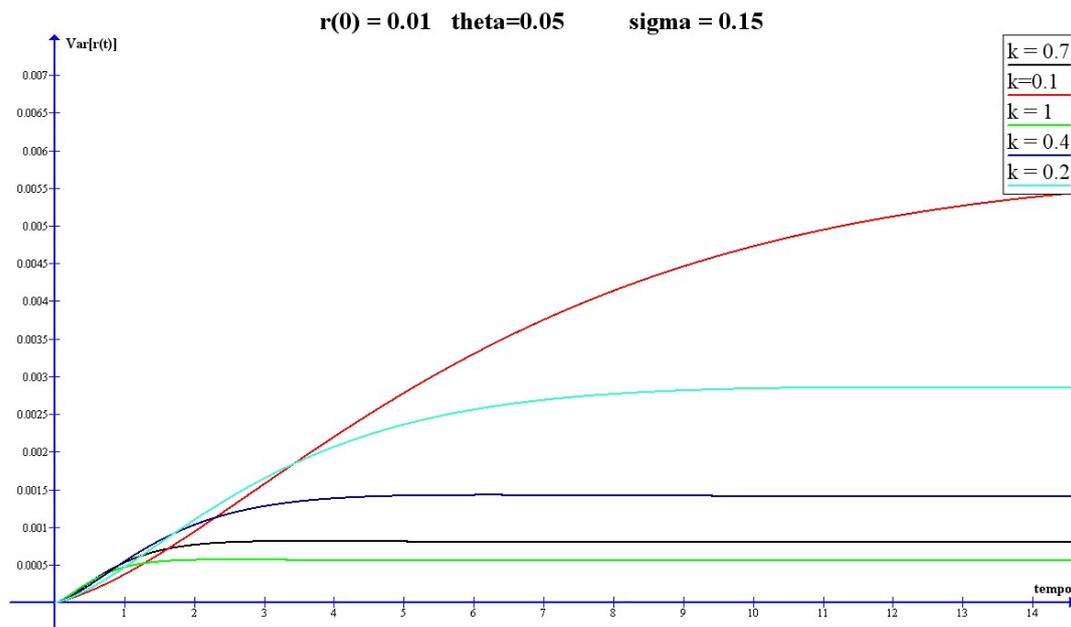


Figura 3.24: Sensibilidade do modelo de CIR relativamente ao parâmetro  $k$

A mudança na taxa de juro instantânea em uma unidade de discretização será portanto dada pela relação

$$\Delta_{\theta} r(t_{i+1}) = r_{\theta}(t_{i+1}) - r(t_{i+1}) = \delta_{\theta} k \Delta t. \quad (3.50)$$

Esta relação demonstra que, se variarmos  $\theta$ , o próximo valor da taxa de juro instantânea sofre uma variação de  $\delta_{\theta} k \Delta t$ .

Esta variação da taxa de juro instantânea será tanto mais importante quanto maior o valor do parâmetro  $k$ . Como seria de esperar, uma alteração do valor de  $\theta$  provoca um proporcional aumento no valor expectável da nossa taxa de juro

$$E[r(t)_{\theta}] = r(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) + \delta_{\theta}(1 - e^{-k(t-s)}) \quad (3.51)$$

provocando também uma alteração, ao contrário do modelo de Vasicek, no valor expectável da variância

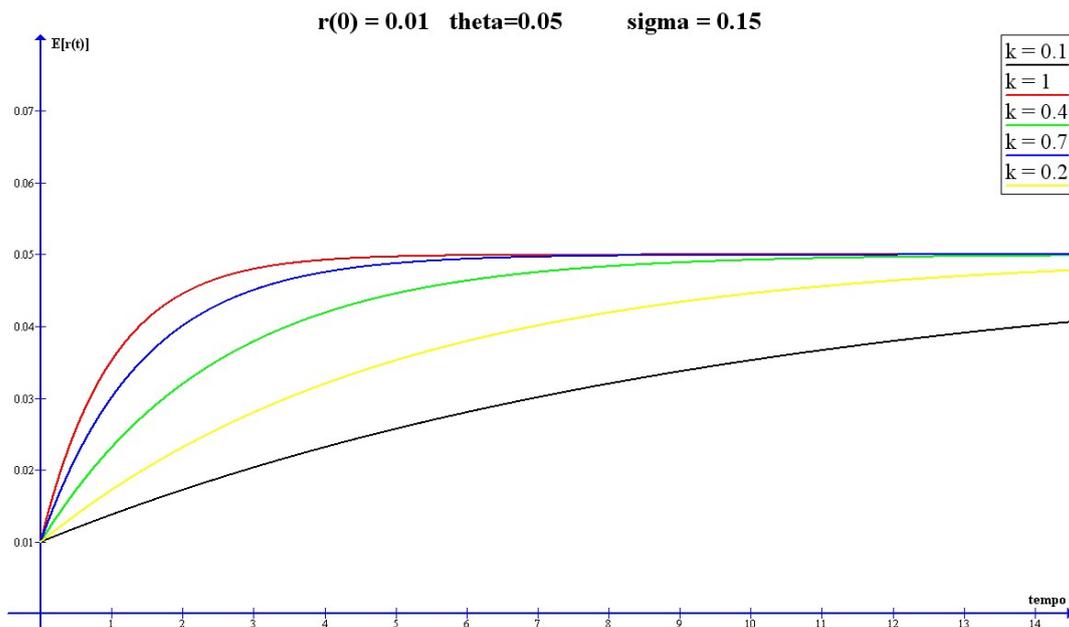


Figura 3.25: Sensibilidade do modelo de CIR relativamente ao parâmetro  $k$

$$Var[r(t)_\theta] = \frac{\sigma^2}{k}(e^{-k(t-s)} - e^{-2k(t-s)}) + (\theta \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2k(t-s)})^2 + (\delta\theta \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2k(t-s)})^2), \quad (3.52)$$

porque

$$E[r(t)_\theta] - E[r(t)] = \delta\theta(1 - e^{-k(t-s)}) \quad (3.53)$$

e

$$Var[r(t)_\theta] - Var[r(t)] = (\delta\theta \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2k(t-s)})^2. \quad (3.54)$$

De onde resulta que a variação na taxa de juro a longo prazo será

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[r(t)_\theta] - E[r(t)] = \delta\theta \quad (3.55)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Var[r(t)_\theta] - Var[r(t)] = \delta\theta \frac{\sigma^2}{2k}. \quad (3.56)$$

Estes resultados são os esperados porque reforçam a ideia presente em toda a literatura da interpretação do parâmetro  $\theta$  como o valor da taxa de juro a longo prazo. Por outro lado, a introdução de uma dependência do valor esperado da variância relativamente a  $\theta$  vem impossibilitar a existência de taxas de juro negativas. Este fenómeno é muito recorrente quando da modelação com o modelo de Vasicek e constitui a sua principal fraqueza. Como podemos ver na figura 3.26 é esta dependência que impossibilita a existência de taxas de juro negativas.

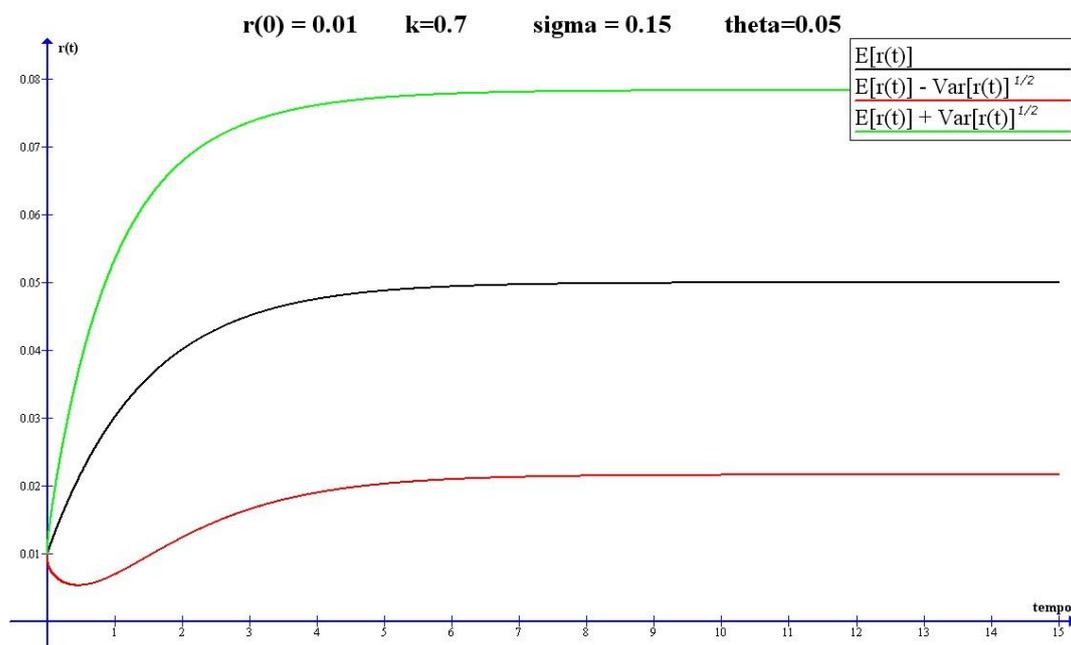


Figura 3.26: Valor esperado e variância no modelo de CIR

### Sensibilidade da taxa de juro instantânea relativamente ao parâmetro $\sigma$

O estudo da sensibilidade do nosso modelo relativamente ao parâmetro  $\sigma$  é conseguido substituindo  $\sigma$  por um valor tão próximo quanto necessário  $\sigma + \delta_\sigma$ . De tal forma que a nossa versão discretizada da taxa de juro instantânea será dada por

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + k(\theta - r(t_i))\Delta t + (\sigma + \delta_\sigma)\sqrt{r(t_i)}\sqrt{\Delta t}W_{i+1}. \quad (3.57)$$

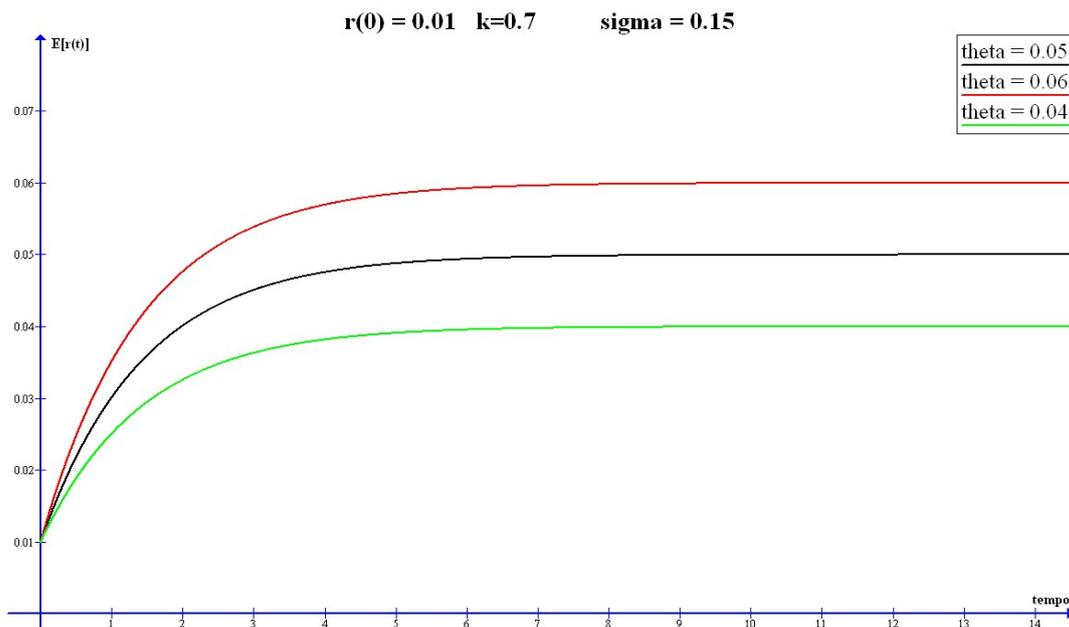


Figura 3.27: Sensibilidade do modelo de CIR relativamente ao parâmetro  $\theta$

A mudança na taxa de juro instantânea em uma unidade de discretização será portanto dada pela relação

$$\Delta_{\sigma} r(t_{i+1}) = r_{\sigma}(t_{i+1}) - r(t_{i+1}) = \delta_{\sigma} \sqrt{r(t_i)} \sqrt{\Delta t} W_{i+1}. \quad (3.58)$$

Esta relação demonstra que se variarmos  $\sigma$ , o próximo valor da taxa de juro instantânea sobre uma variação será  $\delta_{\sigma} \sqrt{r(t_i)} \sqrt{\Delta t} W_{i+1}$ .

Esta variação da taxa de juro instantânea poderá ser negativa ou positiva, dependendo do sinal relativo e conjunto de  $\delta_{\sigma}$  com  $W_{i+1}$ . O valor da variação está altamente dependente do termo de estocacidade.

A alteração do valor de  $\sigma$  não altera o valor esperado da taxa de juro apesar de aumentar as possíveis variações em torno do valor esperado.

$$E[r(t)_{\sigma}] = r(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) \quad (3.59)$$

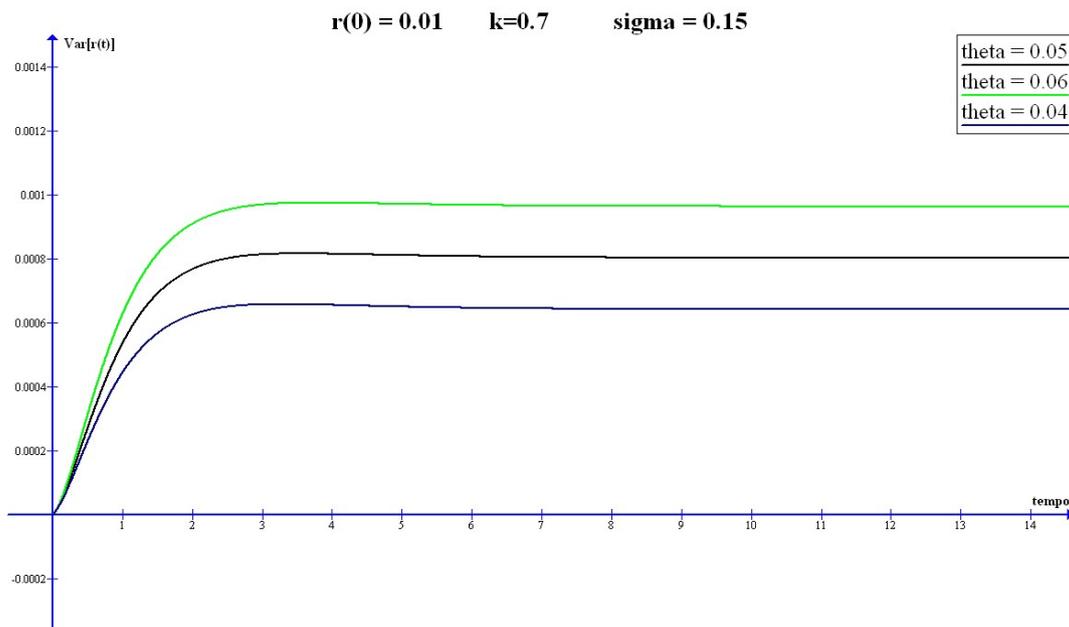


Figura 3.28: Sensibilidade do modelo de CIR relativamente ao parâmetro  $\theta$

$$Var[r(t)_\sigma] = r(s) \frac{\sigma^2}{k} (e^{-k(t-s)} - e^{-2k(t-s)}) + \theta \frac{\sigma^2}{2k} (1 - e^{-2k(t-s)})^2 \quad (3.60)$$

$$E[r(t)_\sigma] - E[r(t)] = 0 \quad (3.61)$$

e

$$Var[r(t)_\sigma] - Var[r(t)] = (2\sigma\delta_\sigma + \frac{\delta_\sigma^2}{k})(e^{-k(t-s)} - e^{-2k(t-s)}) + \frac{\theta}{2k}(2\sigma\delta_\sigma + \delta_\sigma^2)(1 - e^{-2k(t-s)})^2.$$

De onde resulta que a variação na taxa de juro a longo prazo será

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[r(t)_\sigma] - E[r(t)] = 0 \quad (3.62)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Var[r(t)_\theta] - Var[r(t)] = \frac{\theta}{2k}(2\sigma\delta_\sigma + \delta_\sigma^2). \quad (3.63)$$

Ou seja, a alteração do valor de  $\sigma$  altera o valor da variância da taxa de juro, sem alterar o valor esperado da taxa de juro.

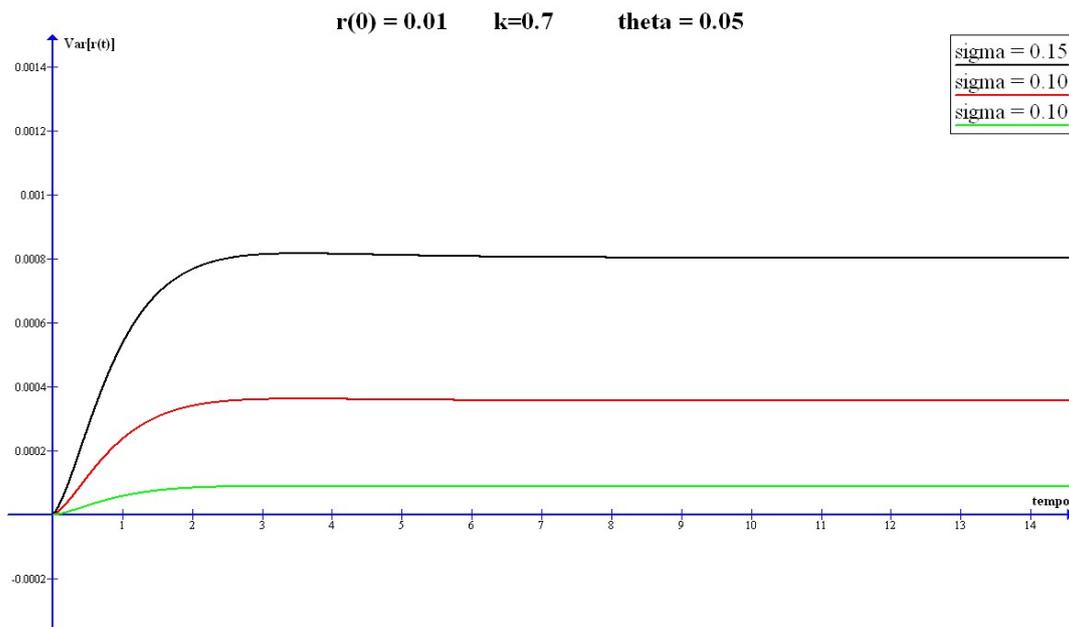


Figura 3.29: Sensibilidade do modelo de CIR relativamente ao parâmetro  $\sigma$

### 3.2.2 Sensibilidade do preço da obrigação de cupão zero relativamente aos diferentes parâmetros

No modelo de CIR, o valor da obrigação de cupão zero é

$$p(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)} \quad (3.64)$$

em que

$$A(t, T) = \left( \frac{2he^{\frac{(k+h)(T-t)}{2}}}{2h + (k+h)(e^{(T-t)h} - 1)} \right)^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}} \quad (3.65)$$

$$B(t, T) = \frac{2(e^{(T-t)h} - 1)}{2h + (k+h)(e^{(T-t)h} - 1)} \quad (3.66)$$

$$h = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}. \quad (3.67)$$

O método usado para perceber a forma como os diferentes parâmetros do modelo afectam

o preço da obrigação do cupão zero consiste em assumir um valor fixo para dois dos três parâmetros, fazendo variar o terceiro parâmetro de forma a perceber o impacto que as suas variações têm no preço das obrigações de cupão zero num tempo fixo mas com diferentes tempos de maturidade. Uma vez que uma análise de variações usando o método de Euler não permite obter resultados conclusivos devido à complexidade das relações obtidas vamos cingir-nos à análise numérica.

### Sensibilidade da obrigação de cupão zero relativamente ao parâmetro $k$

Na análise de sensibilidade da obrigação de cupão zero relativamente ao parâmetro  $k$  verificamos directamente que, quanto menor o valor de  $k$ , maior o valor da obrigação de cupão zero. (cf. Figura 3.30)

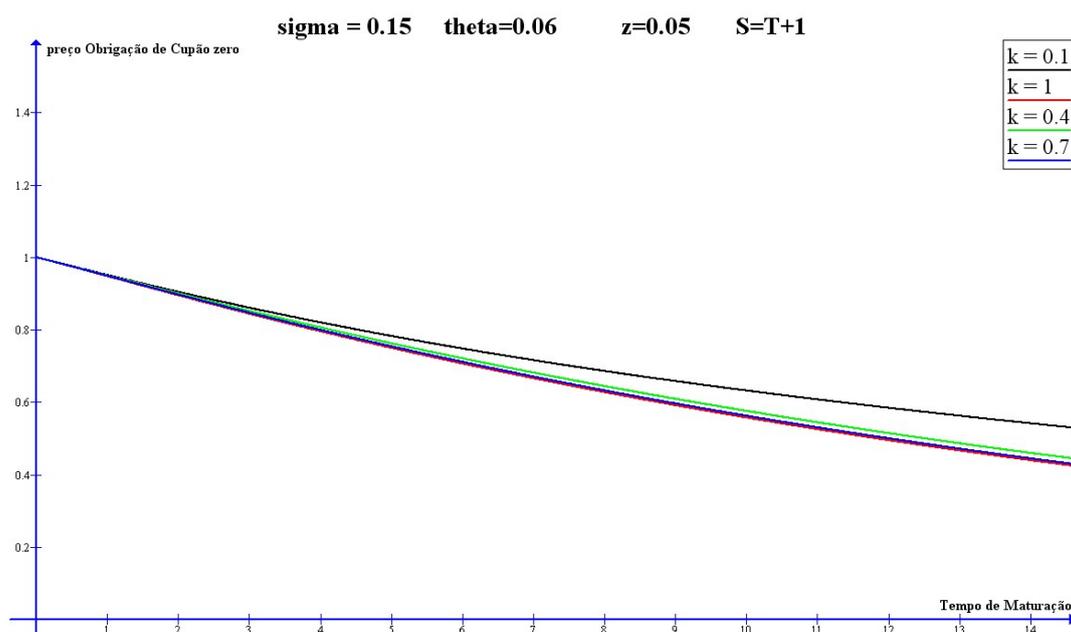


Figura 3.30: Sensibilidade do preço das obrigações de cupão zero relativamente ao parâmetro  $k$

### Sensibilidade da obrigação de cupão zero relativamente ao parâmetro $\theta$

Nesta análise, verificamos imediatamente que uma variação do parâmetro  $\theta$  provoca um efeito directo no preço das obrigações. Quanto maior o nosso parâmetro  $\theta$  menor o preço

das obrigações. Ou seja, quanto maior o valor da taxa de juro a longo prazo ( $\theta$ ) menor o valor a pagar para garantir em  $T$  uma unidade de dinheiro (cf. Figura 3.31).

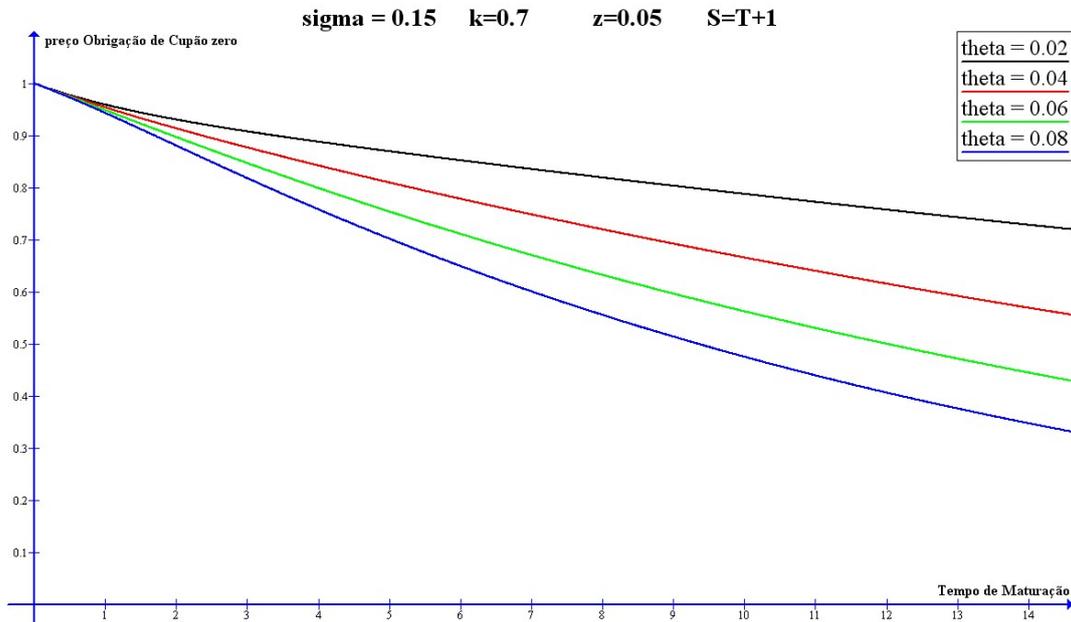


Figura 3.31: Sensibilidade do preço das obrigações de cupão zero relativamente ao parâmetro  $\theta$

### Sensibilidade da obrigação de cupão zero relativamente ao parâmetro $\sigma$

A análise de sensibilidade do preço das obrigações relativamente ao parâmetro  $\sigma$  permite concluir que a valores mais pequenos para o parâmetro  $\sigma$  correspondem preços de obrigação menores. Também verificamos que o parâmetro  $\sigma$  tem uma influência reduzida, quando comparada com a influência no modelo de Vasicek ou com os outros parâmetros, no preço das obrigações (cf. Figura 3.32).

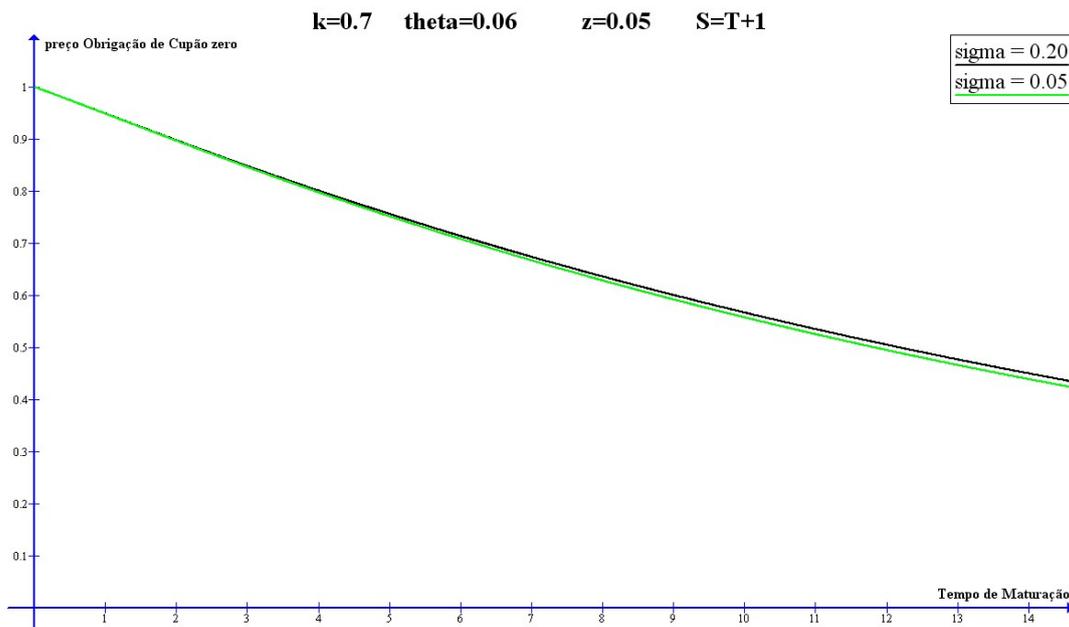


Figura 3.32: Sensibilidade do preço das obrigações de cupão zero relativamente ao parâmetro  $\sigma$

### 3.2.3 Sensibilidade da taxa LIBOR relativamente aos diferentes parâmetros do modelo

Como já vimos anteriormente, a taxa LIBOR pode ser escrita como uma relação dos preços de obrigação de cupão zero, pelo que deverá ser sensível aos mesmos parâmetros que as obrigações de cupão zero

$$L(T, S) = \frac{1}{S - T} \frac{p(t, T) - p(t, S)}{p(t, S)}. \tag{3.68}$$

O método usado para perceber a forma como os diferentes parâmetros do modelo afectam o valor da taxa LIBOR consiste em assumir um valor fixo para dois dos três parâmetros, fazendo variar o terceiro parâmetro de forma a perceber o impacto que as suas variações têm no valor da taxa LIBOR num tempo fixo mas com diferentes tempos de maturidade. Uma vez que uma análise de variações usando o método de Euler não permite obter resultados de fácil tratabilidade vamos cingir-nos à análise numérica.

### Sensibilidade do valor da taxa LIBOR relativamente ao parâmetro $k$

Na análise de sensibilidade do valor da taxa LIBOR relativamente ao parâmetro  $k$  importa evidenciar que quanto maior o valor de  $k$  maior o valor da taxa LIBOR. Ou seja, quanto mais lenta a convergência entre a taxa de juro instantânea actual e a taxa de juro instantânea a longo prazo, maior o valor da taxa de juro LIBOR, maior a retribuição esperada.

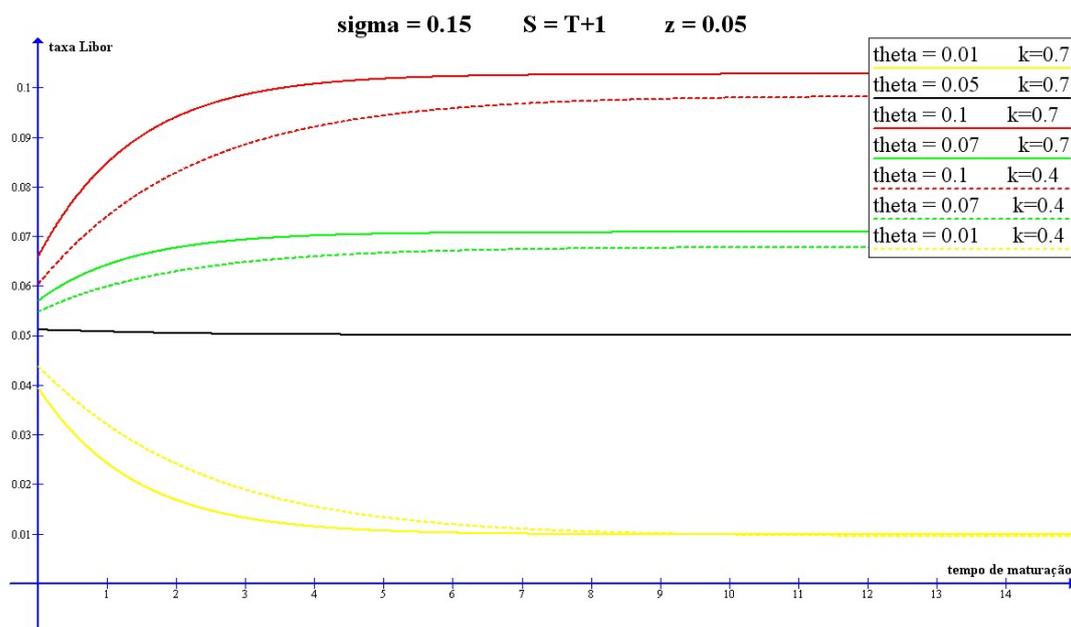


Figura 3.33: Sensibilidade do valor da taxa LIBOR relativamente ao parâmetro  $k$

### Sensibilidade do valor da taxa LIBOR relativamente ao parâmetro $\theta$

Nesta análise, verificamos imediatamente que uma variação do parâmetro  $\theta$  provoca um efeito directo no valor da taxa LIBOR, quanto maior o nosso parâmetro  $\theta$  maior o valor da taxa LIBOR. Ou seja, quanto maior o valor de longo prazo da taxa instantânea maior o valor da taxa LIBOR.

### Sensibilidade do valor da taxa LIBOR relativamente ao parâmetro $\sigma$

A análise de sensibilidade do valor da taxa LIBOR relativamente ao parâmetro  $\sigma$  permite concluir que a valores maiores do parâmetro  $\sigma$  correspondem valores da taxa LIBOR

menores. Também permite concluir que variações do parâmetro  $\sigma$  produzem pequenas variações no valor da taxa LIBOR. Ou seja, quanto maior a volatilidade menor o valor da taxa LIBOR.

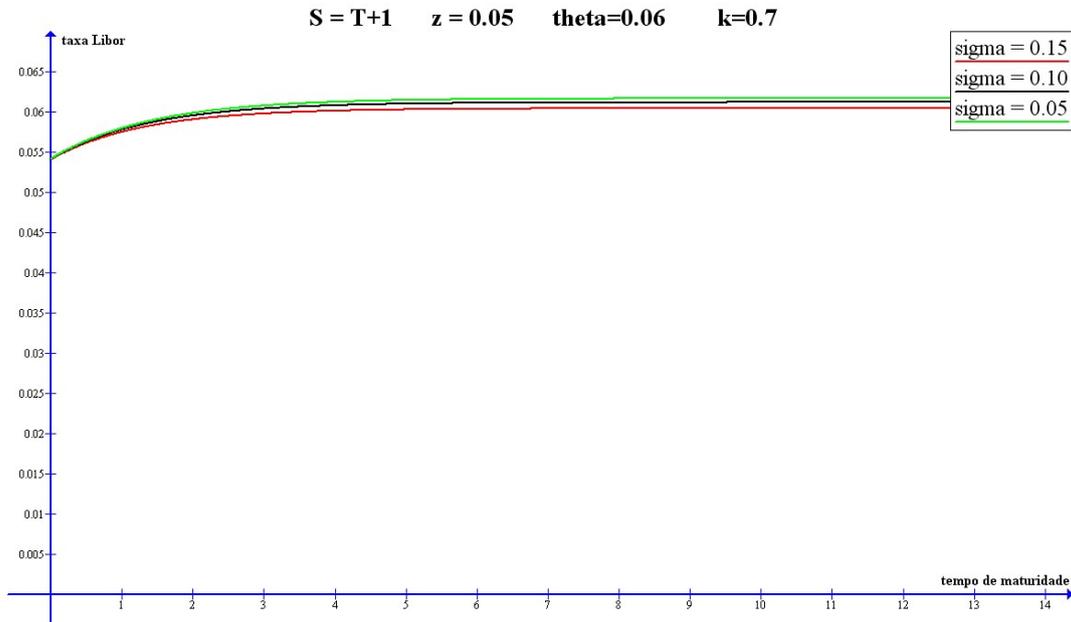


Figura 3.34: Sensibilidade do valor da taxa LIBOR relativamente ao parâmetro  $\sigma$

### 3.2.4 Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente aos diferentes parâmetros do modelo

Como já vimos anteriormente, o ajuste de convexidade das taxas LIBOR é dado por

$$CC_a(t, T, U, S) = E_t^U(L(T, S)) - L(t, T, S) \quad (3.69)$$

ou, de forma explícita

$$CC_a(t, T, U, S) = \frac{1}{S - T} \frac{p(t, T)}{p(t, S)} (e^{F(t, T, U, S) + G(t, T, U, S)z_t} - 1) \quad (3.70)$$

em que  $F$  e  $G$  são funções deterministas de  $(t, T, U, S)$  dadas pelo sistema de equações diferenciais

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (B(t, S) - B(t, U))k_0(t)(B(t, T) - B(t, S)) + Gd(t) - Gk_0(t)B(t, U) + \frac{1}{2}Gk_0(t)G + Gk_0(t)(B(t, T) - B(t, S)) = 0$$

$$F(T; T, U, S) = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + (B(t, S) - B(t, U))K(t)(B(t, T) - B(t, S)) + GE(t) - GK(t)B(t, U) + \frac{1}{2}GK(t)G + GK(t)(B(t, T) - B(t, S)) = 0$$

$$G(T; T, U, S) = 0-$$

Conseguimos deste modo obter, com base no recente trabalho de Gaspar e Murgoci (no prelo), o ajuste de convexidade como solução de um sistema de equações diferenciais para o modelo de taxa de juro com estrutura temporal afim proposto por CIR.

Sabemos que o modelo proposto por Gaspar e Murgoci (no prelo) é válido para o modelo de CIR em que  $E(t) = -k$ ,  $k(t) = \sigma^2$ ,  $k_0(t) = 0$  e  $d(t) = k\theta$ .

Neste caso o nosso sistema de equações diferenciais que permite determinar  $F(t, T, U, S)$  e  $G(t, T, U, S)$  será

$$\frac{\partial F}{\partial t} + Gk\theta$$

$$F(T; T, U, S) = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + (B(t, S) - B(t, U))\sigma^2(B(t, T) - B(t, S)) - Gk - G\sigma^2B(t, U) + \frac{1}{2}G\sigma^2G + G\sigma^2(B(t, T) - B(t, S)) = 0$$

$$G(T; T, U, S) = 0.$$

Partindo da solução numérica baseada no algoritmo de resolução do problema (cf. Anexo I) é possível realizar uma análise de sensibilidade relativamente aos parâmetros do modelo.

A necessidade de entendimento detalhado da influência de cada um dos parâmetros no valor do ajuste de convexidade impõe que a análise seja feita de duas formas distintas mas complementares. Vimos, através do trabalho de Gaspar e Murgoci (no prelo), que o cálculo do ajuste de convexidade para modelos com estrutura temporal afim era feito através do cálculo e análise de duas funções auxiliares, a função  $G(t, T, U, S)$  e a função  $F(t, T, U, S)$ . Iremos fazer uma análise de sensibilidade das nossas funções auxiliares  $F(t, T, U, S)$  e  $G(t, T, U, S)$  e, partindo desta análise, proceder a uma análise de sensibilidade detalhada do ajuste de convexidade de taxas LIBOR.

### **Estudo de sensibilidade da função $F(t, T, U, S)$**

A análise da função  $F(t, T, U, S)$  permite concluir antes de mais que, quanto maior o tempo de maturidade envolvido, maior o valor da função. Ou seja, quanto mais afastado se encontra o tempo de maturidade, maior a contribuição da função  $F(t, T, U, S)$  para o ajuste de convexidade.

Da análise de sensibilidade da função  $F(t, T, U, S)$  relativamente ao parâmetro  $\theta$  resulta que, quanto maior o parâmetro  $\theta$ , maior o valor da função. Ou seja, quanto maior for a taxa de juro instantânea a longo prazo, maior a contribuição da função  $F(t, T, U, S)$  para o ajuste de convexidade.

Da análise de sensibilidade da função  $F(t, T, U, S)$  relativamente ao parâmetro  $\sigma$ , resulta que quanto maior o parâmetro  $\sigma$  maior o valor da função. Ou seja, quanto maior for a volatilidade associada à taxa de juro instantânea, maior a contribuição da função  $F(t, T, U, S)$  para o ajuste de convexidade.

Da análise de sensibilidade da função  $F(t, T, U, S)$  relativamente ao parâmetro  $k$  resulta que de  $k$  com menores valores resultam funções  $F(0, T, U, S)$  com maiores valores. Ou seja, quanto menor for a velocidade de convergência da taxa de juro instantânea, relativamente à taxa de juro instantânea a longo prazo maior a contribuição da função  $F(t, T, U, S)$  para o ajuste de convexidade.

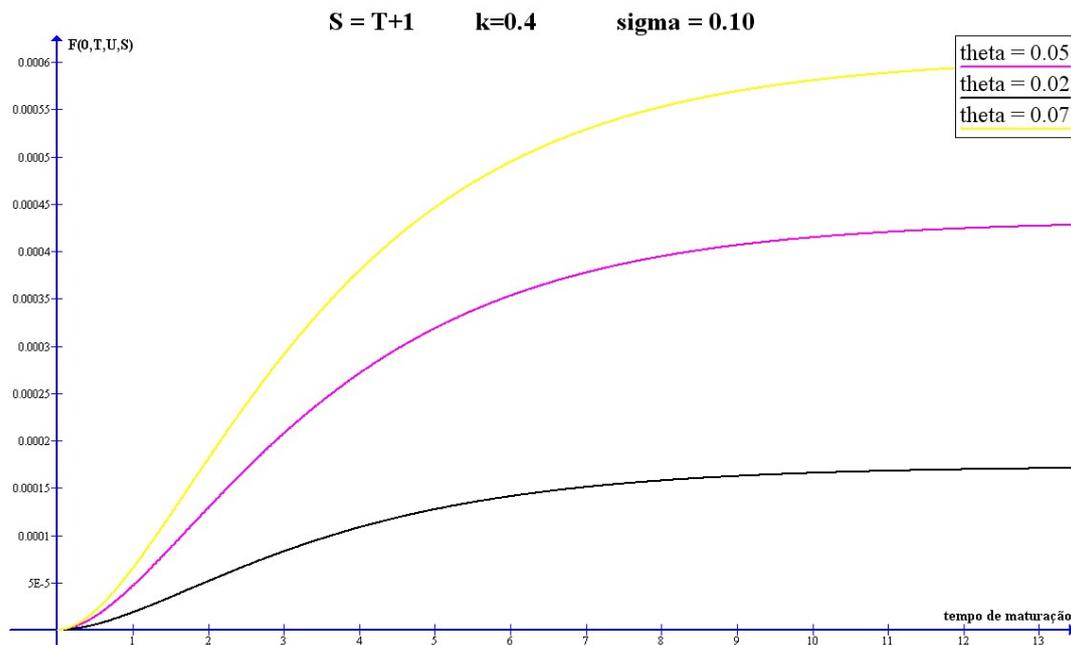


Figura 3.35: Sensibilidade da função  $F(t, T, U, S)$  relativamente ao parâmetro  $\theta$

Da análise de sensibilidade da função  $F(t, T, U, S)$  relativamente à diferença  $S - T$  podemos concluir que quanto maior o valor da diferença de  $S - T$ , maior o valor da função  $F(0, T, U, S)$ . Ou seja, quanto maior for a diferença  $S - T$ , maior a contribuição da função  $F(t, T, U, S)$  para o ajuste de convexidade.

### Estudo de sensibilidade da função $G(t, T, U, S)$

A análise da função  $G(t, T, U, S)$  permite concluir, antes de mais, que a função possui uma forma bastante distinta daquela obtida pela função  $F(t, T, U, S)$ . Enquanto que, para a função  $F(t, T, U, S)$ , quanto maior o tempo de maturidade envolvido, maior o valor da função, ou seja, para tempos de maturidade maiores seria de esperar uma maior contribuição para o ajuste de convexidade. Na função  $G(t, T, U, S)$ , aquilo que concluímos é que para tempos de maturidade muito elevados, a função possui valores progressivamente menores, sendo que para tempos de maturidade pequenos a função atinge valores elevados, atingindo mesmo um valor máximo para tempos de maturidade pequenos. A função  $G(t, T, U, S)$  tem uma contribuição muito maior para o ajuste de convexidade em tempos

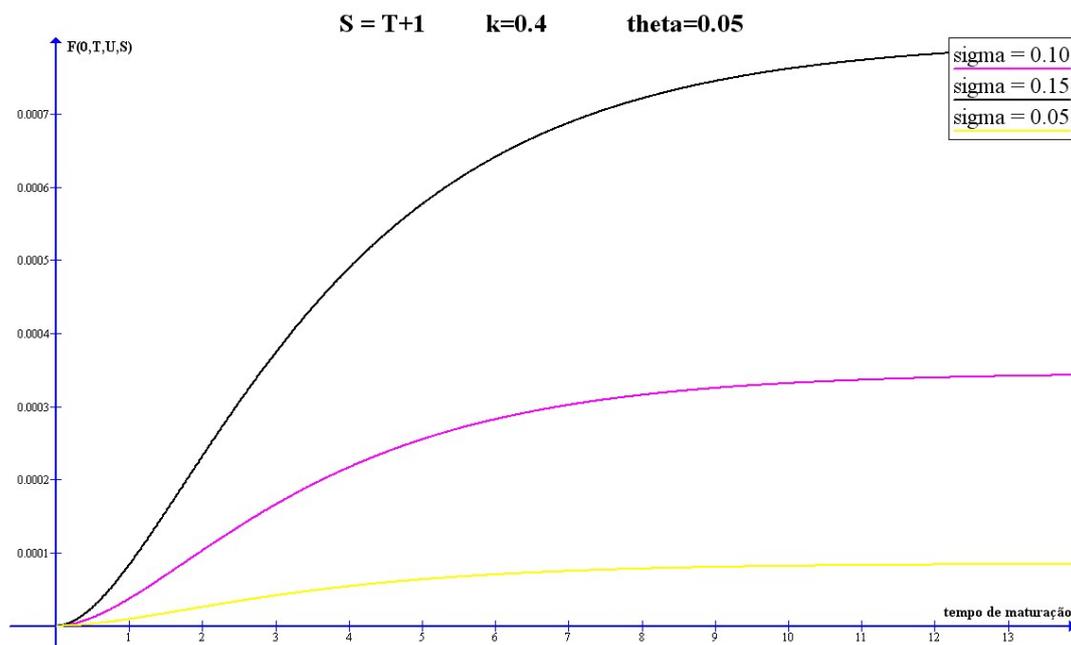


Figura 3.36: Sensibilidade da função  $F(t, T, U, S)$  relativamente ao parâmetro  $\sigma$

de maturidade pequenos. Estes dados permitem evidenciar que a função  $G(t, T, U, S)$  será responsável por uma parte significativa do ajuste de convexidade para tempos de maturidade menores, sendo que, para tempos de maturidade elevados, a contribuição preponderante será devida à função  $F(t, T, U, S)$ .

Da análise de sensibilidade da função  $G(t, T, U, S)$  relativamente ao parâmetro  $\theta$  resulta que a função  $G(t, T, U, S)$  apresenta uma independência explícita relativamente a este parâmetro. Esta situação não nos parece alheia ao facto de a função  $G(t, T, U, S)$  ter valor significativo apenas para tempos de maturidade pequenos, enquanto que o parâmetro  $\theta$  nos surge como o valor da taxa de juro instantânea a longo prazo.

Da análise de sensibilidade da função  $G(t, T, U, S)$  relativamente ao parâmetro  $\sigma$  podemos concluir que, quanto maior este parâmetro, maior o valor máximo atingido pela função, não alterando no entanto o tempo de maturidade a que este máximo ocorre.

Da análise de sensibilidade da função  $G(t, T, U, S)$  relativamente ao parâmetro  $k$  podemos concluir que, quanto menor o valor deste parâmetro, maior o valor da função, maior

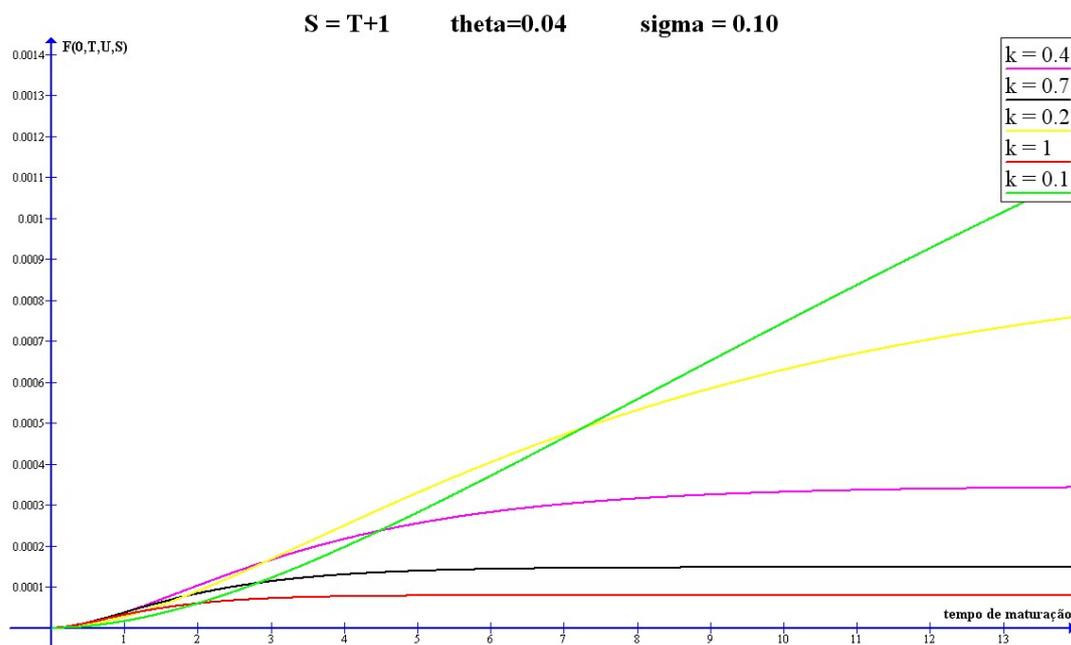


Figura 3.37: Sensibilidade da função  $F(t, T, U, S)$  relativamente ao parâmetro  $k$

o valor máximo atingido pela função e maior o tempo de maturidade em que o valor máximo é atingido.

Da análise de sensibilidade da função  $G(t, T, U, S)$  relativamente à diferença  $S - T$ , podemos concluir que quanto maior o valor da diferença de  $S - T$  maior o valor máximo atingido pela função  $G(0, T, U, S)$ , não alterando, no entanto, o tempo de maturidade a que este máximo ocorre.

Da análise tida, podemos concluir que existem três grupos de resposta da função  $G(t, T, U, S)$  relativamente aos parâmetros do modelo: (1) temos um grupo constituído apenas pelo parâmetro  $\theta$  que não influencia explicitamente a função; (2) temos um grupo em que se encontra o parâmetro  $\sigma$  e a diferença  $S - T$  que influenciam apenas o valor máximo obtido pela função (não o local temporal) e (3) um terceiro grupo de resposta que é constituído apenas pelo parâmetro  $k$  que influencia (amplia ou reduz) quer o máximo obtido pela função, quer o local de obtenção desse máximo. O parâmetro  $k$  é o parâmetro responsável por a função  $G(t, T, U, S)$  pelo tempo de maturidade onde a função terá um maior contributo a dar ao ajuste de convexidade.

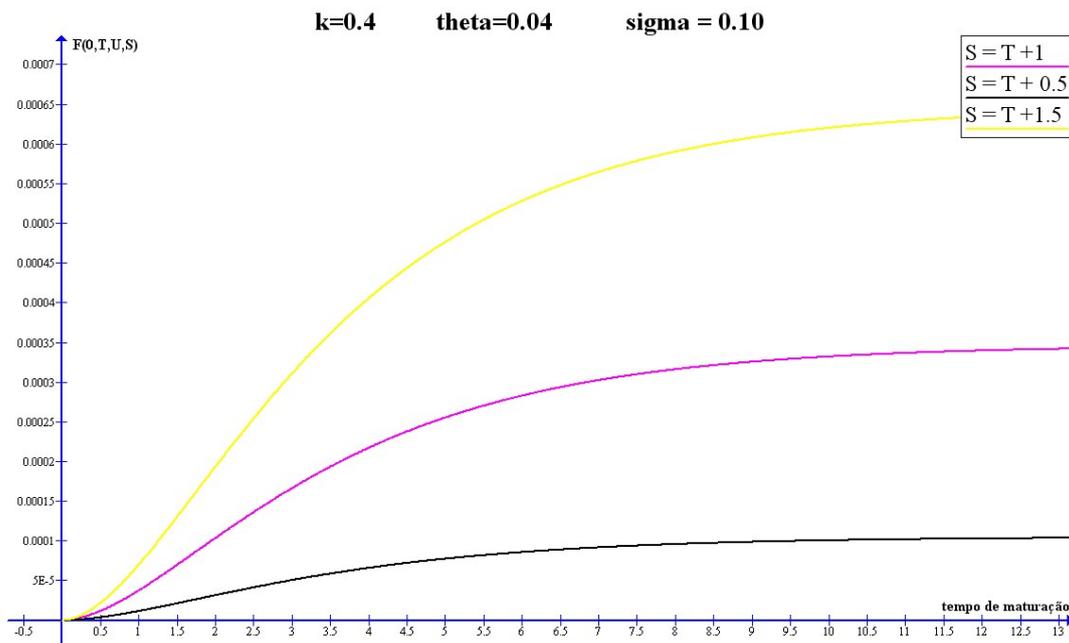


Figura 3.38: Sensibilidade da função  $F(t, T, U, S)$  relativamente à diferença  $S_T$

### Estudo de sensibilidade do ajuste de convexidade de taxas LIBOR

Como já vimos anteriormente, o ajuste de convexidade de taxas LIBOR é dado pela relação

$$CC_a(t, T, U, S) = \frac{1}{S - T} \frac{p(t, T)}{p(t, S)} (e^{F(t, T, U, S) + G(t, T, U, S)z_t} - 1). \quad (3.71)$$

O estudo de sensibilidade do ajuste de convexidade foi realizado procedendo a duas classes de análise diferentes. Para cada um dos parâmetros do modelo foi realizada uma análise de sensibilidade relativamente ao ajuste de convexidade e uma análise de sensibilidade relativamente a aquilo a que se optou por chamar de peso relativo do ajuste de convexidade.

O peso relativo de ajuste de convexidade surge como medida da contribuição da correcção do ajuste de convexidade para o valor expectável da taxa LIBOR, numa medida forward-U, com  $T \leq U \leq S$ . Ou seja, como

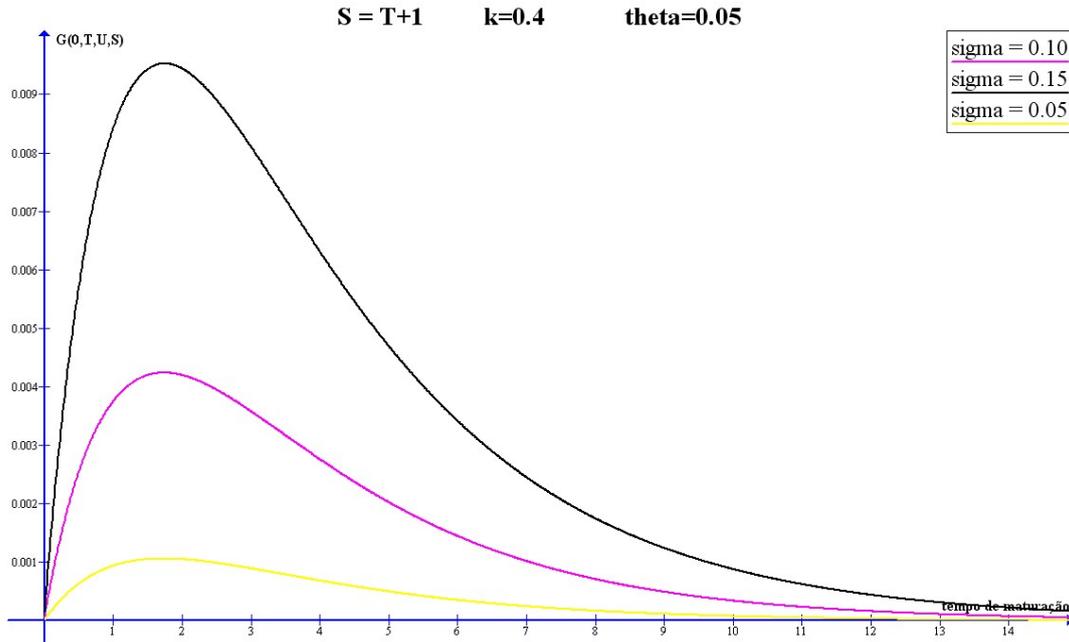


Figura 3.39: Sensibilidade da função  $G(t, T, U, S)$  relativamente ao parâmetro  $\sigma$

$$\frac{CC_a(t, T, U, S)}{E_t^U(L(T, S))} \quad (3.72)$$

em que

$$CC_a(t, T, U, S) = E_t^U(L(T, S)) - L(t, T, S). \quad (3.73)$$

Da análise de sensibilidade do ajuste de convexidade  $CC_a(t, T, U, S)$  relativamente ao parâmetro  $\theta$  conclui-se que quanto maior o valor de  $\theta$ , maior o valor do ajuste de convexidade, sendo de realçar que, para  $\theta$  pequenos, surge uma forma incaracterística em que o máximo do ajuste de convexidade acontece para tempos de maturidade pequenos. Este facto acontece porque nesta situação ( $\theta$  pequeno) o ajuste de convexidade proveniente da função  $G(t, T, U, S)$  é preponderante relativamente ao ajuste de convexidade proveniente da função  $F(t, T, U, S)$ .

Ao analisarmos a contribuição relativa da correcção do ajuste de convexidade para o valor expectável da taxa LIBOR concluimos que, para valores pequenos de  $\theta$ , o máximo

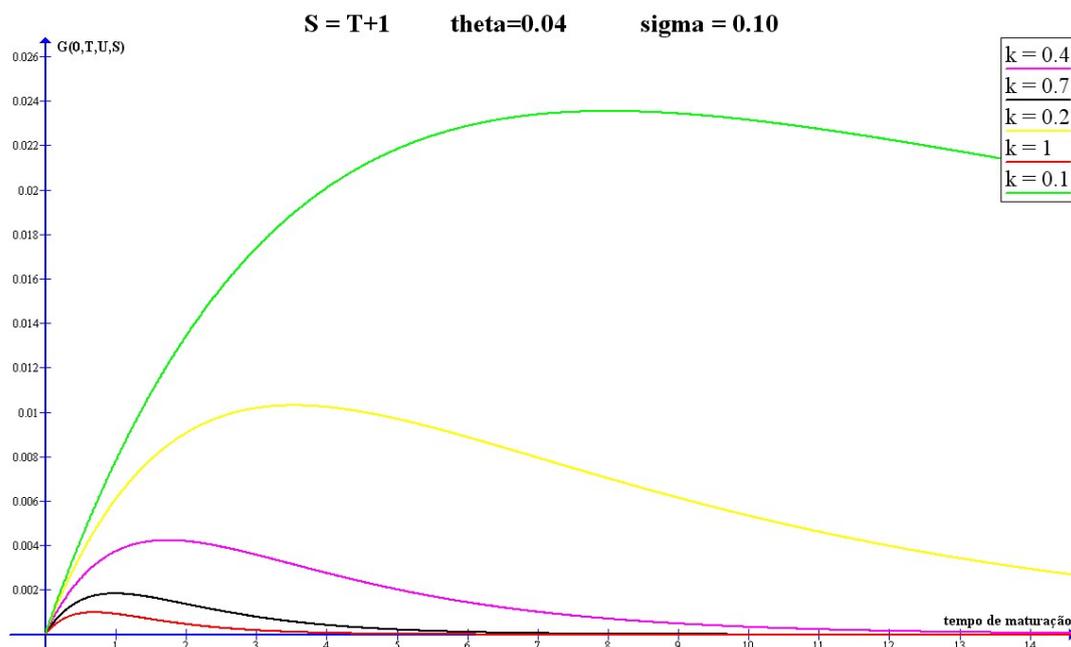


Figura 3.40: Sensibilidade da função  $G(t, T, U, S)$  relativamente ao parâmetro  $k$

da contribuição ocorre também em tempos de maturidade pequenos, prova de que, para esta classe de valores de  $\theta$  o ajuste de convexidade proveniente da função  $G(t, T, U, S)$  é claramente preponderante.

Da análise de sensibilidade do ajuste de convexidade  $CC_a(t, T, U, S)$  relativamente ao parâmetro  $k$  concluímos que, quanto menor o valor do parâmetro, maior o ajuste de convexidade, quer em termos absolutos quer na contribuição relativa da correcção do ajuste de convexidade para o valor expectável da taxa LIBOR.

Da análise de sensibilidade do ajuste de convexidade  $CC_a(t, T, U, S)$  relativamente ao parâmetro  $\sigma$  concluímos que, quanto maior o valor do parâmetro, maior o ajuste de convexidade, quer em termos absolutos quer na contribuição relativa da correcção do ajuste de convexidade para o valor expectável da taxa LIBOR.

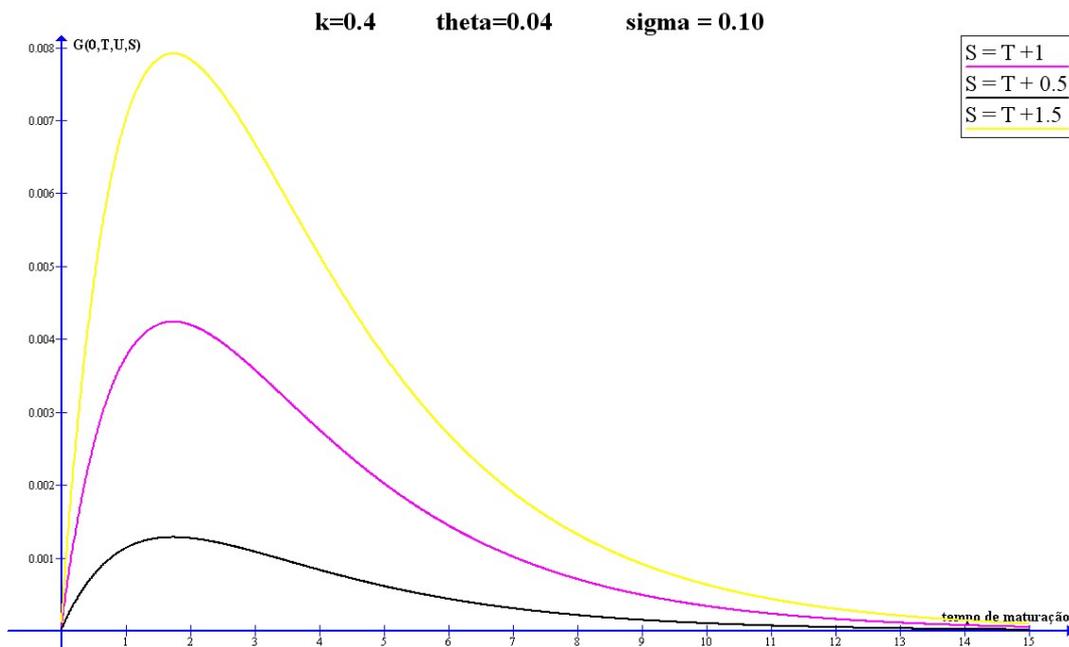


Figura 3.41: Sensibilidade da função  $G(t, T, U, S)$  relativamente à diferença  $S_T$

Da análise de sensibilidade do ajuste de convexidade  $CC_a(t, T, U, S)$  relativamente á diferença  $S - T$  concluímos que, quanto maior a diferença  $S - T$ , maior o ajuste de convexidade, quer em termos absolutos quer na contribuição relativa da correcção do ajuste de convexidade para o valor expectável da taxa LIBOR.

Durante a análise da influência de cada um dos parâmetros do modelo no ajuste de convexidade conseguimos perceber que as duas funções  $F(t, T, U, S)$  e  $G(t, T, U, S)$  obtidas através do trabalho de Gaspar e Murgoci (no prelo) apresentam espaços temporais de influência distintos e complementares. Ao analisarmos o peso específico de cada uma das funções, comprovamos que, de facto, a função  $G(t, T, U, S)$  tem maior influência na correcção do ajuste de convexidade para o valor expectável da taxa LIBOR para tempos de maturidade reduzidos, enquanto que a função  $F(t, T, U, S)$  tem maior influência na correcção do ajuste de convexidade para o valor expectável da taxa LIBOR para tempos de maturidade altos. (cf. Figura 3.50)

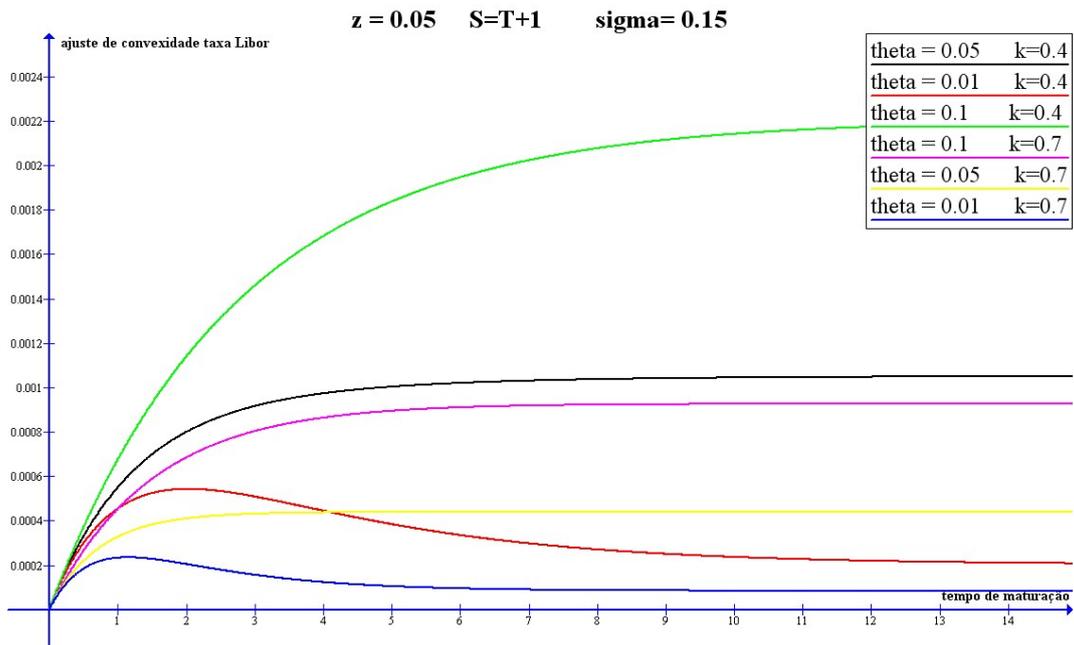


Figura 3.42: Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente a  $\theta$  com  $\sigma = 0.15$

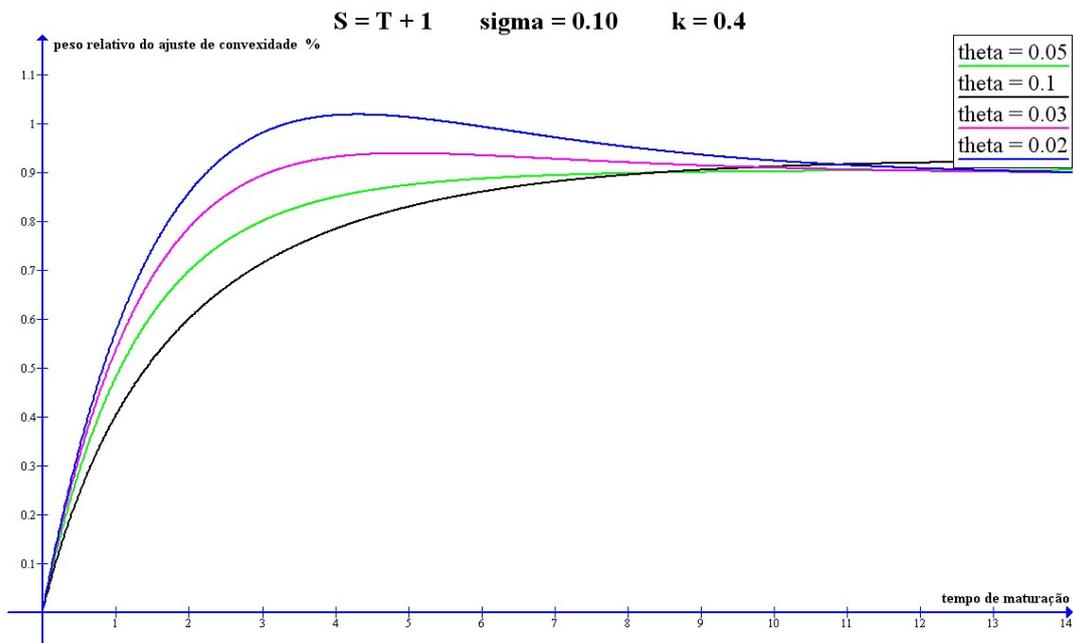


Figura 3.43: Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente a  $\theta$  com  $\sigma = 0.10$

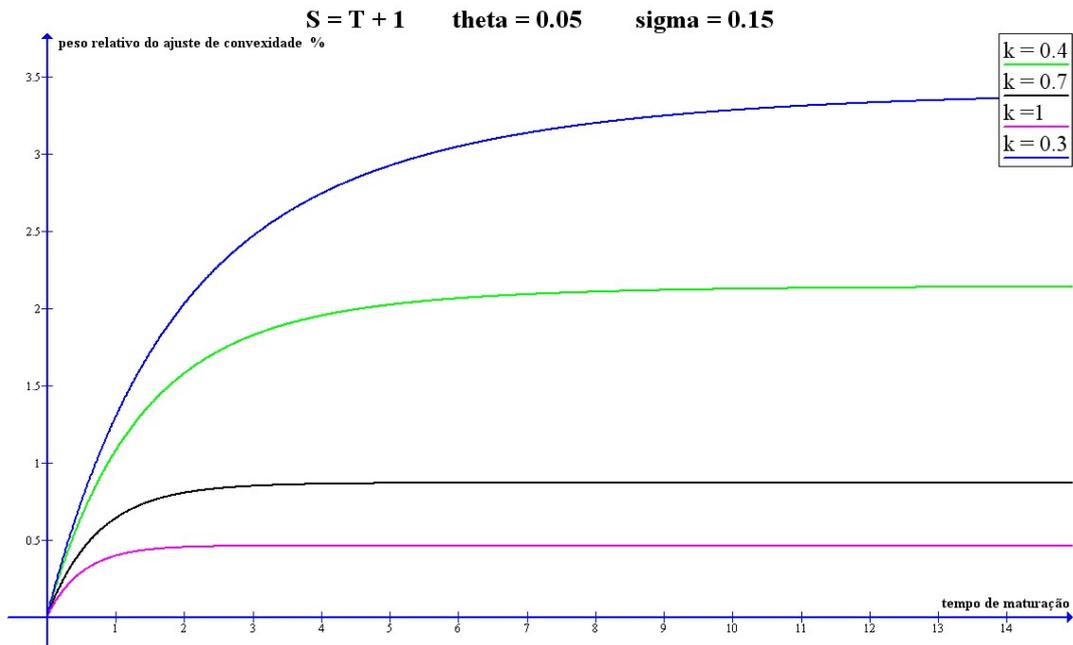


Figura 3.44: Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente a  $k$

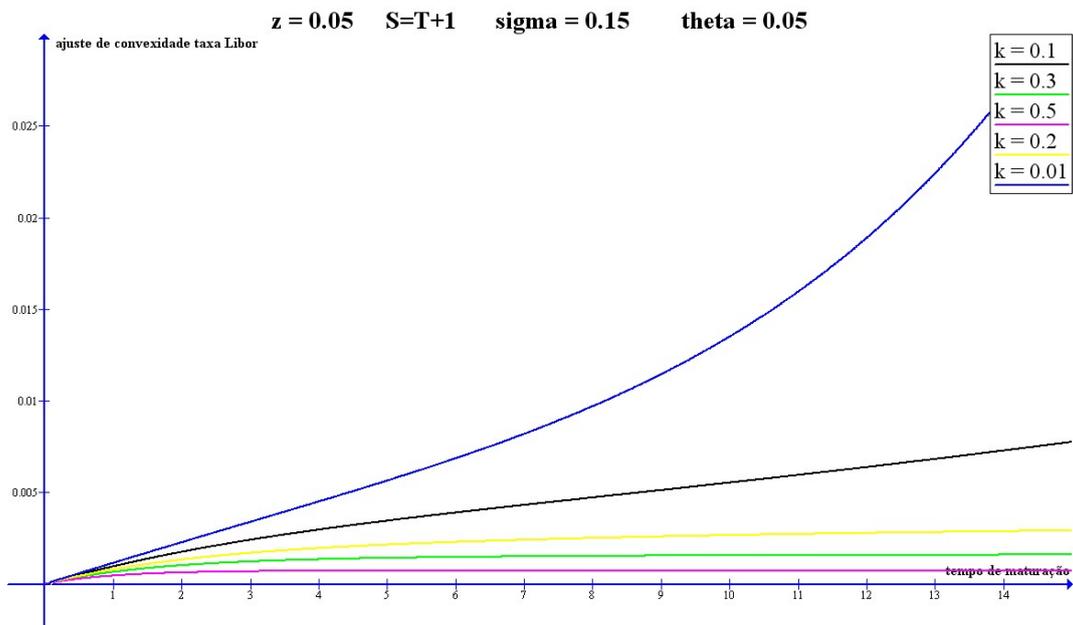


Figura 3.45: Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente a  $k$  muito pequenos

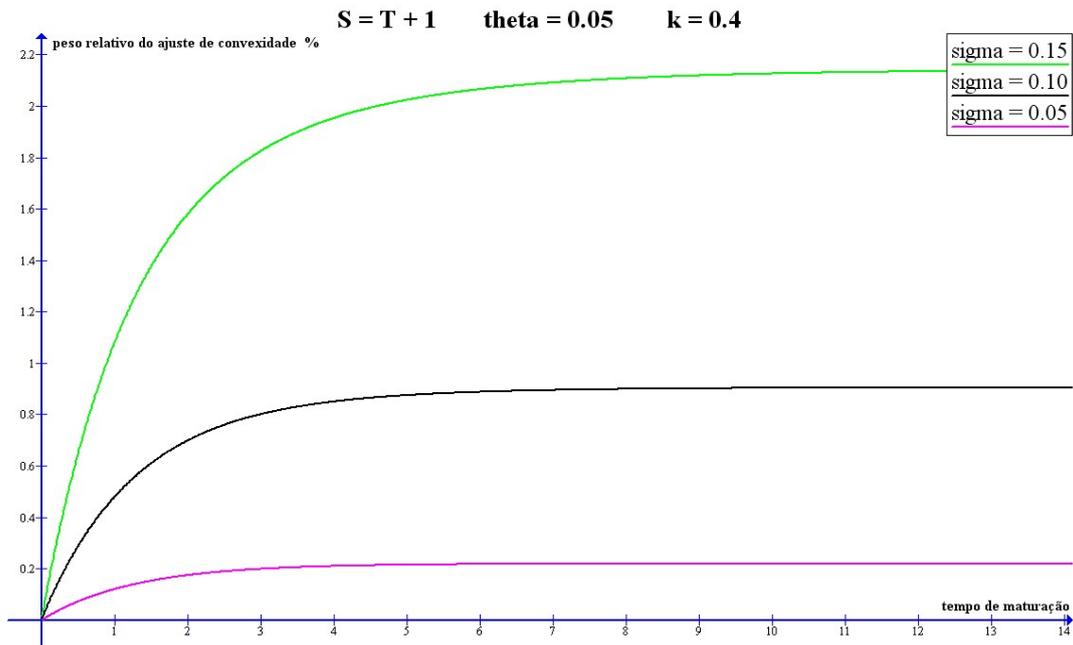


Figura 3.46: Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente a  $\sigma$

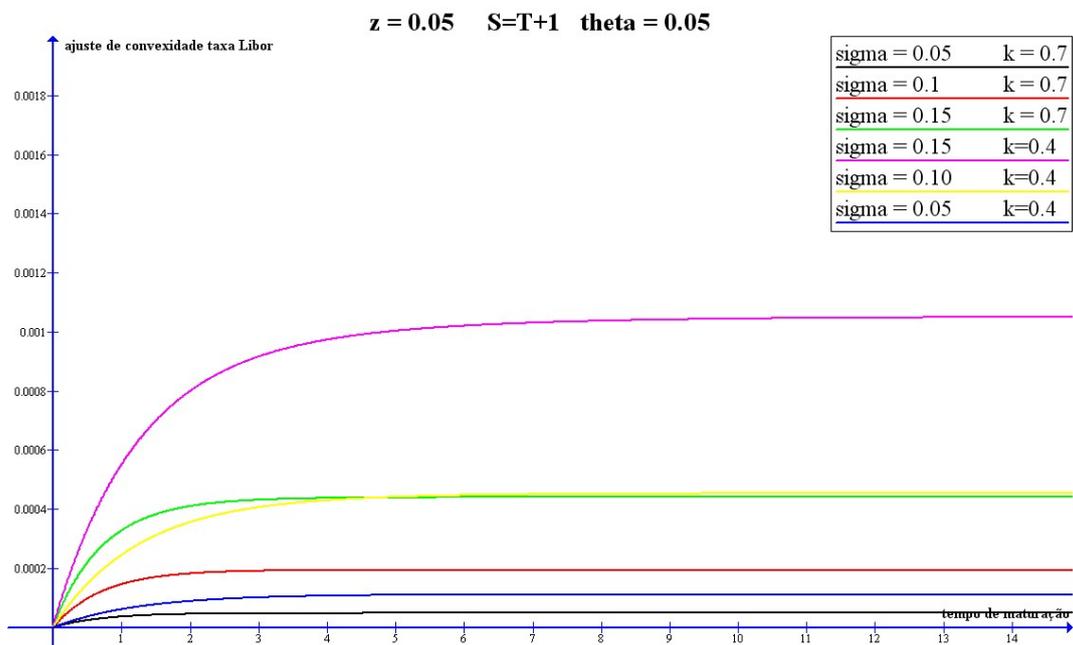


Figura 3.47: Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente a  $\sigma$  com diferentes valores de k

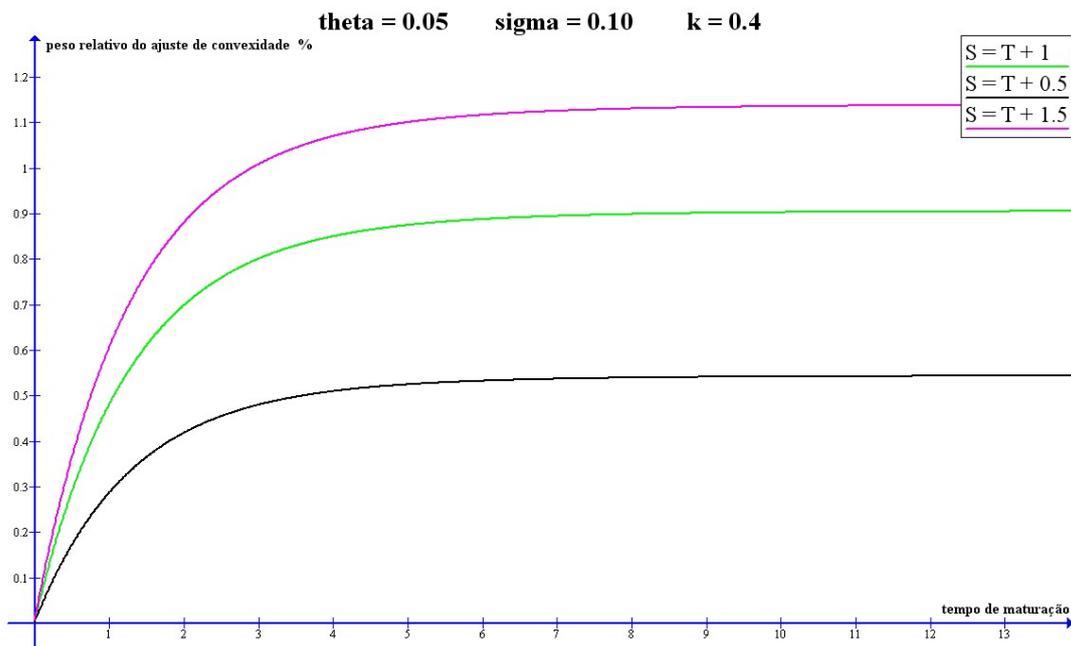


Figura 3.48: Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente à diferença  $S - T$  para  $\sigma = 0.10$

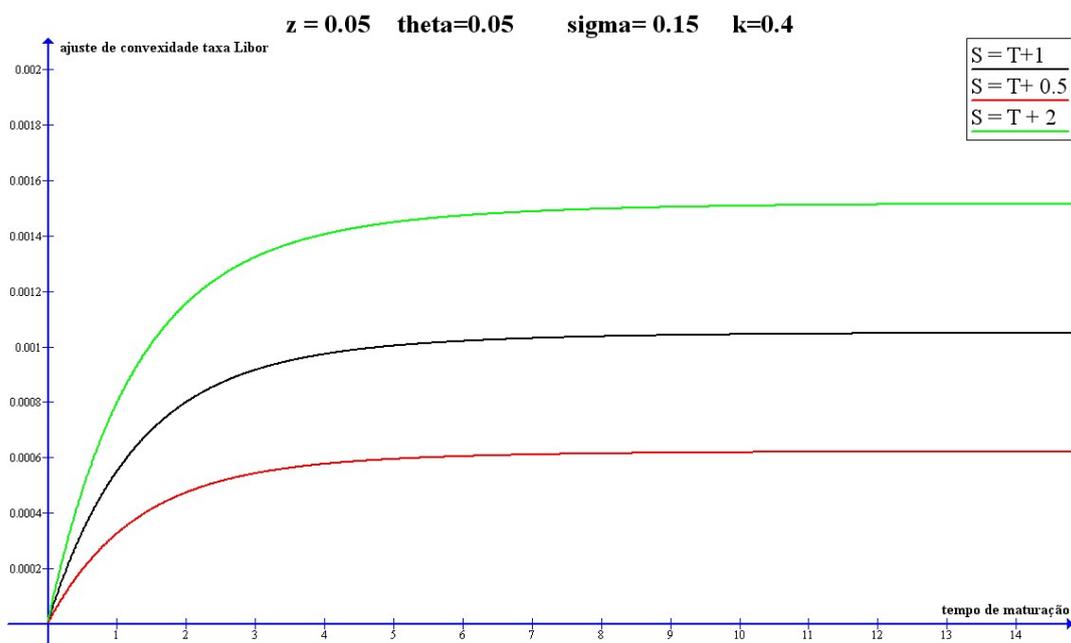


Figura 3.49: Sensibilidade do ajuste de convexidade relativamente à diferença  $S - T$  para  $\sigma = 0.15$

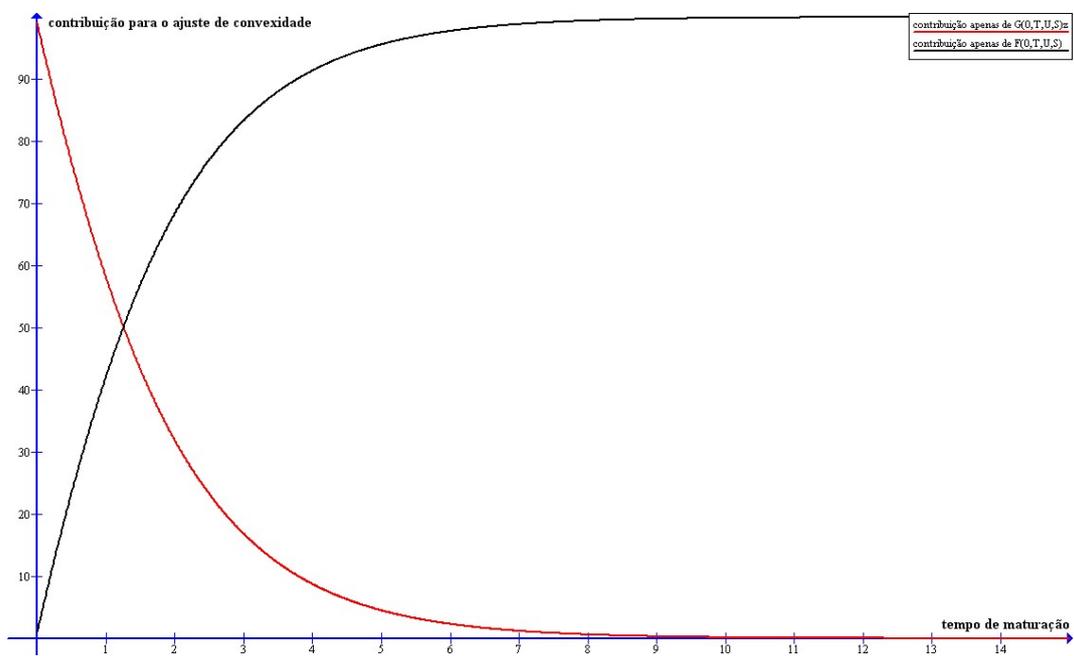


Figura 3.50: Influência na correcção do ajuste de convexidade

# Capítulo 4

## Conclusões

Este trabalho permite-nos retirar um conjunto bastante alargado de conclusões, pelo que as vamos apresentar em quatro grupos confrontando, em cada um deles, as conclusões obtidas relativamente ao modelo de Vasicek e ao modelo de CIR.

### 4.1 Taxa de juro instantânea

Conseguimos perceber através da análise de sensibilidade da taxa de juro instantânea que, em ambos os modelos analisados:

- (1) o parâmetro  $k$  influencia a velocidade de convergência entre o valor actual da taxa de juro instantânea e o seu valor limite futuro; este parâmetro influencia de forma significativa a volatilidade associada à dinâmica da nossa taxa de juro sendo que, quanto maior o valor do parâmetro, menor a volatilidade associada. Ou seja, quanto maior a taxa de convergência entre o valor actual da taxa de juro instantânea e o seu valor limite futuro, menor a incerteza associada à determinação do valor da taxa de juro instantânea;
- (2) o parâmetro  $\sigma$  influencia a variância associada à dinâmica da taxa de juro sendo que, quanto maior o valor do parâmetro, maior a volatilidade associada ao processo e maior a incerteza em relação ao valor da taxa de juro instantânea, apesar de este não ter qualquer influência sobre o valor esperado para a taxa de juro instantânea;
- (3) o parâmetro  $\theta$  influencia de forma diferente a dinâmica da taxa de juro nos dois mode-

los; enquanto que no modelo de Vasicek este apenas influencia o valor esperado da taxa de juro instantânea, no modelo proposto por CIR o parâmetro não só influencia o valor esperado da taxa de juro como influencia a variância da taxa de juro instantânea. Vimos que quanto maior o valor de  $\theta$ , maior o valor esperado para a taxa de juro instantânea, sendo que a dependência da variância relativamente à taxa de juro no modelo de CIR faz com que exista uma probabilidade nula de existência de taxas de juro instantâneas negativas.

## 4.2 Obrigações de cupão zero

A análise de sensibilidade relativamente às obrigações de cupão zero, em ambos os modelos analisados, mostram-nos o seguinte:

- (1) o parâmetro  $k$  influencia o valor das obrigações sendo que, quanto menor o valor de  $k$ , maior o valor das obrigações. Ou seja, quanto menor a taxa de convergência entre o valor actual da taxa de juro instantânea e o seu valor limite futuro, maior o valor da obrigação;
- (2) o parâmetro  $\sigma$  influencia o valor das obrigações, sendo que a valores menores para o parâmetro correspondem valores menores para a obrigação. Ou seja, quanto menor a incerteza associada à taxa de juro instantânea, menor será o valor a pagar para garantir, em  $T$ , uma unidade de dinheiro;
- (3) o parâmetro  $\theta$  influencia, em ambos os modelos analisados, o valor das obrigações sendo que, quanto maior o valor de  $\theta$ , menor o valor das obrigações. Ou seja, quanto maior o valor limite da nossa taxa de juro instantânea, menor será o valor a pagar para garantir, em  $T$ , uma unidade de dinheiro.

## 4.3 Taxa LIBOR

A análise de sensibilidade relativamente ao valor da taxa LIBOR, em ambos os modelos analisados, revelou-nos o seguinte:

- (1) quanto maior o valor de  $k$ , maior o valor esperado para a taxa LIBOR. Ou seja, quanto maior a taxa de convergência entre o valor actual da taxa de juro instantânea e o seu valor

limite futuro, maior o valor da taxa LIBOR;

(2) quanto maior o valor de  $\theta$ , maior o valor esperado para a taxa LIBOR. Ou seja, quanto maior valor limite futuro da taxa de juro instantânea, maior o valor da taxa LIBOR;

(3) quanto maior o valor de  $\sigma$ , menor o valor esperado para a taxa LIBOR. Ou seja, quanto maior a volatilidade associada à dinâmica da taxa de juro instantânea, menor o valor da taxa LIBOR.

## 4.4 Ajuste de convexidade da taxa LIBOR

A análise do ajuste de convexidade da taxa LIBOR, quando o sistema é modelado através do modelo proposto por Vasicek, mostra-nos ser possível obter esse ajuste, numa forma fechada e directa, através de tratamento algébrico. No modelo de Vasicek, a função  $G(t, T, U, S)$  proposta por Gaspar e Murgoci (no prelo) possui sempre valor nulo e a função  $F(t, T, U, S)$  é passível de ser tratada algebricamente, sendo a sua expressão dada por

$$F(t, T, U, S) = \frac{1}{2k^3} e^{-2kt} (e^{-kS} - e^{-kU}) \sigma^2 (e^{-kT} - e^{-kS}) - \frac{1}{2k^3} e^{-2kT} (e^{-kS} - e^{-kU}) \sigma^2 (e^{-kT} - e^{-kS}).$$

Ao procedermos à análise de sensibilidade da função  $F(t, T, U, S)$  concluímos que: (1) não existe uma dependência explícita relativamente ao parâmetro  $\theta$ ; (2) para menores valores do parâmetro  $k$  resulta uma função com valores maiores e (3) a parâmetros  $\sigma$  com maiores valores correspondem funções com valores maiores.

Do estudo de sensibilidade do ajuste de convexidade resulta que a sua contribuição para o valor expectável da taxa LIBOR, na medida forward-U, será tanto maior quanto menor o parâmetro  $\theta$  e  $k$  e quanto maior o parâmetro  $\sigma$ .

Por outro lado, quando o sistema é modelado através do modelo de CIR, não existe uma solução formal e fechada conhecida para o ajuste de convexidade da taxa LIBOR, pelo que a análise realizada se baseou exclusivamente numa resolução numérica. Desta resultou que:

(1) para a função  $F(t, T, U, S)$ , quanto maior o tempo de maturidade, maior o valor numérico da função. Este valor numérico é tanto maior quanto maior for o parâmetro  $\theta$  e o parâmetro  $\sigma$  e quanto menor o parâmetro  $k$ . Ou seja, quanto maior a volatilidade, a maturidade e o valor limite da taxa de juro instantânea, e quanto menor a velocidade de convergência, maior a função  $F(t, T, U, S)$ ;

(2) a função  $G(t, T, U, S)$ , para tempos de maturidade muito elevados, possui valores numéricos progressivamente menores enquanto que, para tempos de maturidade pequenos, a função atinge valores elevados, atingindo mesmo o seu máximo numérico. Assim, a função  $G(t, T, U, S)$  será responsável por uma parte significativa do ajuste de convexidade para tempos de maturidade pequenos, enquanto que a função  $F(t, T, U, S)$  terá uma contribuição preponderante para tempos de maturidade elevados. A análise de sensibilidade desta função revela-nos que (i) esta não tem uma dependência explícita relativamente ao parâmetro  $\theta$ , o que se compreende pela interpretação deste parâmetro enquanto valor limite da taxa de juro instantânea, (ii) quanto maior o parâmetro  $\sigma$ , maior o valor numérico máximo atingido pela função, não alterando, apesar de tudo, o tempo de maturidade em que este máximo ocorre e (iii) quanto menor o valor de  $k$ , maior o valor da função e maior o tempo de maturidade em que ocorre o seu máximo numérico;

(3) o peso relativo do ajuste de convexidade no valor expectável da taxa LIBOR é maximizado por maiores valores no parâmetro  $\theta$  e  $\sigma$  e menores valores no parâmetro  $k$ , sendo que as funções  $F(t, T, U, S)$  e  $G(t, T, U, S)$  apresentam espaços temporais de influência distintos mas complementares. A função  $G(t, T, U, S)$  tem maior influência na correcção introduzida pelo ajuste de convexidade em tempos de maturidade reduzidos, enquanto que a função  $F(t, T, U, S)$  tem maior influência no peso relativo do ajuste de convexidade relativamente ao valor expectável da taxa LIBOR para tempos de maturidade altos.

# Bibliografia

Benninga, S., Wiener, Z. (1998). Team Structure of Interest Rates. *Mathematica in Education and Research* 7 (2), pp. 1-9.

Björk, T. (2004). *Arbitrage Theory in Continuous Time* (2a ed.). Estocolmo: Oxford University Press.

Brigo, D., Mercurio, F. (2007). *Interest Rate Models: Theory and Practice* (3a ed.). Nova Iorque: Springer.

Cox, J., Ingersoll, J. e Ross, S. (1985). A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53, pp. 385–407.

Evans, L. C. (2006). *An Introduction to Stochastic Differential Equations*. Los Angeles: UC Berkeley.

Gaspar, R. M., Murgoci, A. (2008). Convexity Adjustments for ATS Models. *ISEG Advance Working Paper*, 9

Gaspar, R. M., Murgoci, A. (2009). *Convexity Adjustments*. In Encyclopedia of Quantitative Finance. John Wiley and Sons.

Gillespie, D. T. (1996). Exact numerical simulation of the Ornstein-Uhlenbeck process and its integral. *Physical Review E*, 54 (2), pp. 2084-2091.

Higham, D. J. (2001). An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations. *SIAM Review*, 43 (3), pp. 525-546.

Higham, D. J. (2004). *An Introduction to Financial Option Valuation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Hull, J. C. (2005). *Options, Futures and other Derivatives* (6a ed.). New Jersey: Prentice Hall.

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P. (2007). *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (3a ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

Roepstorff, G. (1994). *Path Integral Approach to Quantum Physics: An Introduction*. Berlin: Springer-Verlag.

Vasicek, O. (1977). An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 177–188.

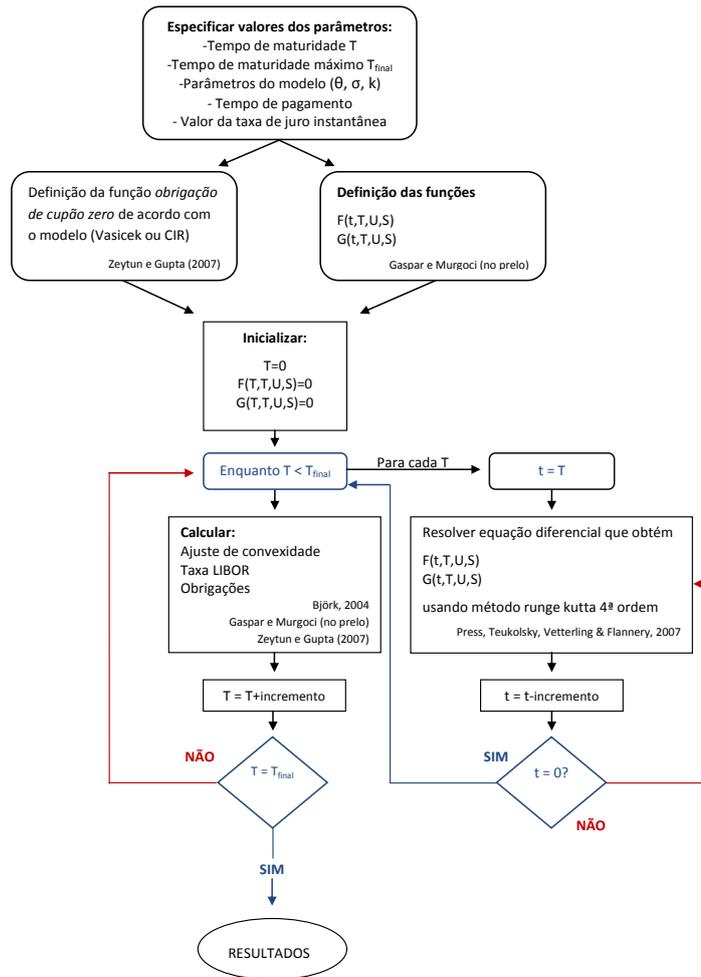
Wilmott, P., Howison, S., Dewynne, J. (1995). *The Mathematics of Financial Derivatives, A Student Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.

Zeytun, S., Gupta, A. (2007). A Comparative Study of the Vasicek and the CIR Model of the Short Rate. *Berichte des Fraunhofer ITWM*, 124, pp. 1-17.

# **ANEXOS**

# ANEXO I

## Resolução Numérica do Ajuste de Convexidade



Gillespie (1996); Higham (2001, 2004); Press, Teukolsky, Vetterling e Flannery (2007)

## ANEXO II

### Fórmula de Itô

Assumindo que  $X$  é um processo estocástico solução da equação diferencial estocástica

$$dX(t) = Fdt + GdW, \quad (4.1)$$

em que  $F$  e  $G$  são duas funções passíveis de integração e  $W$  um processo de Wiener, e assumindo que existe uma função  $u : \mathfrak{R} \times [0, T] \rightarrow \mathfrak{R}$  contínua e que  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$  e  $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$  existem e são contínuas, se  $Y(t) := u(X(t), t)$ , então, segundo Wilmott, Howison e Dewynne (1995),  $Y$  possui como diferencial estocástico a relação conhecida na literatura como fórmula de Itô:

$$dY = \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} F + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} G^2 \right) dt + \frac{\partial u}{\partial x} G dW. \quad (4.2)$$

## ANEXO III

### Integral de Itô

Segundo Higham (2001), dada uma função  $h$ , o integral  $\int h(t)dt$  pode ser aproximado através de uma soma de Riemann

$$\sum_{j=0}^{N-1} h(t_j)(t_{j+1} - t_j). \quad (4.3)$$

De forma semelhante, podemos considerar uma soma da forma

$$\sum_{j=0}^{N-1} h(t_j)(W_{j+1} - W_j), \quad (4.4)$$

como uma aproximação ao integral estocástico  $\int_0^T h(t)dW$ .

## ANEXO IV

### Mudança de Girsanov

Na teoria das probabilidades, o teorema de Girsanov diz-nos como os processos estocásticos são alterados perante mudanças de medida. Na matemática financeira, o uso deste teorema surge na conversão de uma medida física para uma medida de risco neutral. Björk (2004) define o teorema de Girsanov como indicando que o processo  $W^Q$ , definido por

$$W_t^Q = W_t^P - \int_0^t \varphi_s ds, \quad (4.5)$$

é um processo de Wiener na medida  $Q$ , para qualquer processo  $\varphi$ .

## **ANEXO V**

### **Arbitragem**

Segundo Vicente (2006), uma operação de arbitragem é uma estratégia de transacção que tem um cash flow positivo e não tem risco de perda no final ou que não necessita de cash flow inicial, não tem risco de perda e tem uma probabilidade positiva de gerar lucros no futuro.