STRUCTURE LOCALE DE VARIÉTÉS DE JACOBI-NIJENHUIS

Fani PETALIDOU *et Joana M. NUNES da COSTA †

Departamento de Matemática
Universidade de Coimbra
Apartado 3008
3001-454 Coimbra - Portugal
e-mail : fpetalid@mat.uc.pt, jmcosta@mat.uc.pt

Abstract

After a brief review on the basic notions and the principal results concerning the Jacobi manifolds, the relationship between homogeneous Poisson manifolds and conformal Jacobi manifolds, and also the compatible Jacobi manifolds, we give a generalization of some of these results needed for the contents of this paper. We introduce the notion of Jacobi-Nijenhuis structure and we study the relation between Jacobi-Nijenhuis manifolds and homogeneous Poisson-Nijenhuis manifolds. We present a local classification of homogeneous Poisson-Nijenhuis manifolds and we establish some local models of Jacobi-Nijenhuis manifolds.

Keywords : *Jacobi manifold, homogeneous Poisson manifold, Jacobi-Nijenhuis manifold, homogeneous Poisson-Nijenhuis manifold.*

Résumé

Après un rappel des notions basiques et des résultats essentiels concernant les variétés de Jacobi, les variétés de Poisson homogènes en relation avec les variétés conformes de Jacobi et les variétés de Jacobi compatibles, et une généralisation de ces résultats adaptée aux besoins de cet article, on introduit la notion de structure de Jacobi-Nijenhuis et on étudie les relations entre les variétés de Jacobi-Nijenhuis et les variétés de Poisson-Nijenhuis homogènes. On effectue une classification locale de variétés de Poisson-Nijenhuis homogènes et on établit des modèles locaux de variétés de Jacobi-Nijenhuis.

Mots-clés : *Variété de Jacobi, variété de Poisson homogène, variété de Jacobi-Nijenhuis, variété de Poisson-Nijenhuis homogène.*

A.M.S. classification (2000) : 53D05, 53D10, 53D17.

*Recherche partiellement supportée par CMUC-FCT.

†Recherche partiellement supportée par CMUC-FCT et PRAXIS.

Introduction

La notion de *structure de Jacobi-Nijenhuis* a été introduite dans [17] par J.C. Marrero, J. Monterde et E. Padron et comprend comme cas particulier celle de *structure de Poisson-Nijenhuis faible* déterminée dans [18]. Dans ce travail, nous proposons une définition plus stricte de cette notion qui généralise de manière naturelle celle de *structure de Poisson-Nijenhuis* introduite par F. Magri et C. Morosi [14], [6], afin d'étudier les systèmes hamiltoniens complètement intégrables. Notre envie est de mettre en évidence quelques aspects de la géométrie locale de cette nouvelle structure, en espérant qu'elle va jouer un rôle aussi important que celui des structures de Poisson, de Jacobi et de Poisson- Nijenhuis à l'étude des systèmes intégrables.

Le présent article est divisé en trois parties.

Les paragraphes 1-3 de la Partie I (§1-§5) sont consacrés au rappel et au enrichissement des notions et des résultats essentiels concernant les variétés de Jacobi, les variétés conformes de Jacobi, les variétés de Poisson homogènes et les variétés de Jacobi compatibles. Au paragraphe 4 on introduit la notion d'*opérateur de Nijenhuis.* Dans le paragraphe 5, on détermine les notions de *structure de Jacobi-Nijenhuis*, de *structure conforme de Jacobi-Nijenhuis* et de *Poisson-Nijenhuis homogène*, et on établit un lien très particulier entre les variétés de Jacobi-Nijenhuis et celles de Poisson-Nijenhuis homogènes. Précisement, on démontre qu'une sous-variété de codimension 1 d'une variété de Poisson-Nijenhuis homogène transverse au champ d'homothéties possède une structure de Jacobi-Nijenhuis induite (cf. Proposition 5.2), et toute variété de Jacobi-Nijenhuis peut être obtenue de cette manière (cf. Proposition 5.6).

Dans la Partie II (§6-§9), en se reposant sur les résultats des [21] et [23] concernant les modèles locaux de structures de Poisson-Nijenhuis, nous donnons une classification locale de variétés de Poisson-Nijenhuis homogènes.

Enfin, la Partie III (§10-§11) décrit des modèles locaux, au voisinage d'un point générique, de variétés de Jacobi-Nijenhuis. Dans cette partie, on arrive à établir l'existence d'un système de coordonnées locales dans lequel les champs de tenseurs définissant sur une variété une structure de Jacobi-Nijenhuis s'écrivent à coefficients polynômiaux de degré au plus 3.

Partie I

Dans cet article, on désigne par

* M une variété C^∞-différentiable de dimension finie;
* TM et T^*M, respectivement, les fibrés tangent et cotangent de M;
* $C^\infty(M, \mathbf{R})$ l'espace des fonctions C^∞-différentiables sur M à valeurs réelles;
* $\Omega^k(M)$, $k \in \mathbf{N}$, l'espace des k-formes différentielles extérieures sur M;
* $\mathcal{V}^k(M)$, $k \in \mathbf{N}$, l'espace des champs de k-tenseurs contravariants antisymétriques sur M.

Pour le crochet de Schouten (cf. [25], [10]) et le produit intérieur d'une forme et d'un champ de multivecteurs, on adopte la convention de signe indiquée par Koszul (cf. [8], [16]).

1 Variétés de Jacobi

Soit M une variété C^∞-différentiable de dimension finie. On considère sur M un champ de 2-tenseurs Λ et un champ de vecteurs E à partir desquels on définit sur $C^\infty(M, \mathbf{R})$ la loi de composition

$$\{f, g\} = \Lambda(df, dg) + \langle f dg - g df, E \rangle, \quad f, g \in C^\infty(M, \mathbf{R}). \tag{1}$$

Elle est bilinéaire, antisymétrique et elle vérifie, pour toutes $f, g, h \in C^\infty(M, \mathbf{R})$, l'identité de Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

si, et seulement si,

$$[\Lambda, \Lambda] = -2E \wedge \Lambda \quad \text{et} \quad [E, \Lambda] = 0, \tag{2}$$

où $[\,,\,]$ désigne le crochet de Schouten. Lorsque les conditions (2) sont satisfaites, on dit que le couple (Λ, E) définit sur M une *structure de Jacobi* et que (M, Λ, E) est une *variété de Jacobi*. Le crochet (1) s'appelle *crochet de Jacobi* et l'espace $(C^\infty(M, \mathbf{R}), \{,\})$ est une algèbre de Lie locale au sens de Kirillov (cf. [5], [3]).

Dans le cas particulier où E est identiquement nul sur M, les conditions (2) se réduisent à

$$[\Lambda, \Lambda] = 0,$$

qui signifie que Λ munit la variété M d'une *structure de Poisson.*

On note $\Lambda^\# : T^*M \to TM$ et $(\Lambda, E)^\# : T^*M \times \mathbf{R} \to TM \times \mathbf{R}$, respectivement, les morphismes de fibrés vectoriels associés à Λ et à (Λ, E), i.e., pour toutes α, β sections de T^*M et pour toute $f \in C^\infty(M, \mathbf{R})$,

$$\langle \beta, \Lambda^\#(\alpha) \rangle = \Lambda(\alpha, \beta) \tag{3}$$

et

$$(\Lambda, E)^\#(\alpha, f) = (\Lambda^\#(\alpha) + fE, -\langle \alpha, E \rangle). \tag{4}$$

Ces applications peuvent être vues, respectivement, comme homomorphismes de $C^\infty(M, \mathbf{R})$-modules; $\Lambda^\# : \Omega^1(M) \to \mathcal{V}^1(M)$ et $(\Lambda, E)^\# : \Omega^1(M) \times C^\infty(M, \mathbf{R}) \to \mathcal{V}^1(M) \times C^\infty(M, \mathbf{R})$.

Enfin, à toute $f \in C^\infty(M, \mathbf{R})$, on associe le champ de vecteurs

$$X_f = \Lambda^\#(df) + fE \tag{5}$$

que l'on l'appelle *champ de vecteurs hamiltonien associé à f.*

L'image de $\Lambda^\#$ et le champ de vecteurs E définissent une distribution sur M, appelée *distribution caractéristique de* (M, Λ, E), qui est complètement intégrable, (cf. [3], [5], [1]). Donc, elle définit un feuilletage de Stefan de M dont les feuilles, qui sont engendrées par les champs de vecteurs hamiltoniens (5), sont appelées *feuilles caractéristiques de la structure de Jacobi* (Λ, E) de M.

Si, en tout point de M, la feuille caractéristique de (Λ, E) qui passe par ce point est de dimension égale à la dimension de M, on dit que la variété de Jacobi (M, Λ, E) est *transitive.* Selon la parité de la dimension de M, on distingue deux types de variétés de Jacobi transitives :

1. Si M est de dimension impaire, sa structure de Jacobi (Λ, E) est définie par une 1-forme de contact, (cf. [11], [2]).

2. Si M est de dimension paire, sa structure de Jacobi (Λ, E) est définie par une structure localement conformément symplectique, (cf. [11], [2]).

Les feuilles caractéristiques de (Λ, E) sont elles-mêmes variétés de Jacobi transitives, (cf.[11], [2]).

Une structure de Jacobi (Λ, E) étant donnée sur M, l'espace $\Omega^1(M) \times C^\infty(M, \mathbf{R})$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie dont le crochet

$$\boldsymbol{\{}\, , \boldsymbol{\}} : \left(\Omega^1(M) \times C^\infty(M, \mathbf{R})\right)^2 \to \Omega^1(M) \times C^\infty(M, \mathbf{R}) \tag{6}$$

est défini, pour tous $(\alpha, f), (\beta, g) \in \Omega^1(M) \times C^\infty(M, \mathbf{R})$, par

$$\boldsymbol{\{}(\alpha, f), (\beta, g)\boldsymbol{\}} := (\gamma, h), \tag{7}$$

où

$$\gamma := L_{\Lambda^\#(\alpha)}\beta - L_{\Lambda^\#(\beta)}\alpha - d(\Lambda(\alpha, \beta)) + fL_E\beta - gL_E\alpha - i_E(\alpha \wedge \beta), \tag{8}$$

$$h := -\Lambda(\alpha, \beta) + \Lambda(\alpha, dg) - \Lambda(\beta, df) + \langle f dg - g df, E\rangle, \tag{9}$$

(L désigne l'opérateur de dérivée de Lie), (cf. [4]). Lorsque E est identiquement nul sur M, i.e. lorsque Λ est de Poisson sur M, la projection de (6) sur $\Omega^1(M)$ coïncide avec le crochet associé à Λ qui munit cet espace d'une structure d'algèbre de Lie, (cf. [6], [27]).

Soit a une fonction différentiable définie sur M, ne s'annulant en aucun point, et $\{,\}^a : C^\infty(M, \mathbf{R}) \times C^\infty(M, \mathbf{R}) \to C^\infty(M, \mathbf{R})$ une nouvelle loi de composition sur $C^\infty(M, \mathbf{R})$, bilinéaire et antisymétrique, déterminée, pour tout couple $(f, g) \in C^\infty(M, \mathbf{R}) \times C^\infty(M, \mathbf{R})$, par

$$\{f, g\}^a := \frac{1}{a}\{af, ag\}. \tag{10}$$

Cette loi munit l'espace $C^\infty(M, \mathbf{R})$ d'un nouveau crochet de Jacobi définissant sur M une nouvelle structure de Jacobi (Λ^a, E^a), dite *a-conforme* à celle initialement donnée. On dit aussi que les structures (Λ, E) et (Λ^a, E^a) sont *conformément équivalentes.* On a

$$\Lambda^a = a\Lambda \quad \text{et} \quad E^a = \Lambda^\#(da) + aE. \tag{11}$$

La classe d'équivalence des structures de Jacobi sur M conformément équivalentes à une structure de Jacobi donnée est appelée *structure conforme de Jacobi.*

Soient (M_1, Λ_1, E_1) et (M_2, Λ_2, E_2) deux variétés de Jacobi et $\phi : M_1 \to M_2$ une application différentiable. On dit que $\phi : M_1 \to M_2$ est *un morphisme de Jacobi* si Λ_1 et E_1 sont projetables par ϕ sur M_2 et ont pour projections, respectivement, Λ_2 et E_2, i.e.

$$\phi_*\Lambda_1 = \Lambda_2 \quad \text{et} \quad \phi_*E_1 = E_2.$$

Lorsque $\phi : M_1 \to M_2$ est un difféomorphisme de Jacobi, on dit que les structures (Λ_1, E_1) et (Λ_2, E_2) sont *équivalentes.*

En plus, on dit que $\phi : M_1 \to M_2$ est *un morphisme a-conforme de Jacobi* s'il existe une fonction différentiable a sur M, ne s'annulant en aucun point, telle que ϕ soit un morphisme de Jacobi de (M, Λ_1^a, E_1^a) sur (M, Λ_2, E_2).

Pour une exposition plus détaillée des propriétés essentielles des variétés de Jacobi, on peut consulter [11], [15].

2 Variétés de Poisson homogènes et variétés de Jacobi conformes

Dans ce paragraphe on présente et on complète quelques résultats, utiles pour l'étude ultérieure, dûs à A. Lichnerowicz ([11], [12]), et à P. Dazord et C.-M. Marle ([2]), concernant les variétés de Poisson homogènes et les variétés de Jacobi conformes.

Définition 2.1 *On appelle* variété de Poisson homogène, *et on note* (M, Λ, T), *une variété de Poisson* (M, Λ) *munie d'un champ de vecteurs* T, *appelé* champ d'homothéties, *tel que*

$$L_T\Lambda = [T, \Lambda] = -\Lambda.$$

Proposition 2.1 ([2]) *Soit* (M, Λ, T) *une variété de Poisson homogène, et* Σ *une sous-variété de* M *de codimension 1 transverse au champ d'homothéties* T. *Alors,* Σ *possède une structure de Jacobi* $(\Lambda_\Sigma, E_\Sigma)$ *induite, caractérisée par l'une quelconque des propriétés suivantes.*

1. *Pour tout couple* (f, g) *de fonctions homogènes de degré 1 relativement à* T *définies sur un ouvert* $\mathcal{O}$ *de* M, *le crochet de Jacobi des restrictions de* f *et de* g *à* $\Sigma \cap \mathcal{O}$ *est la restriction à* $\Sigma \cap \mathcal{O}$ *du crochet de Poisson de* f *et de* g.

2. *Soit* $\pi : U \to \Sigma$ *la projection sur* Σ *d'un voisinage tubulaire* U *de* Σ *dans* M *tel que, pour tout* $x \in \Sigma$, $\pi^{-1}(x)$ *soit un arc connexe de courbe intégrale de* T. *Soit* a *une fonction définie sur* U, *égale à 1 sur* Σ, *homogène de degré 1 relativement à* T. *Alors, la projection* π *est un morphisme* a*-conforme de Jacobi.*

Bien entendu, les feuilles caractéristiques de la structure de Jacobi $(\Lambda_\Sigma, E_\Sigma)$ de Σ sont (au moins localement) les projections sur Σ, parallèlement aux courbes intégrales de T, des feuilles symplectiques de (M, Λ). Les dernières étant toutes de dimension paire, on a :

1. Une feuille de $(\Sigma, \Lambda_\Sigma, E_\Sigma)$ est de dimension paire si, et seulement si, T n'est pas tangent à la feuille correspondante de (M, Λ). Alors, la restriction à cette feuille symplectique de (M, Λ) de la projection $\pi : U \to \Sigma$ parallèlement aux courbes intégrales de T est un difféomorphisme local de cette feuille de (M, Λ) sur la feuille correspondante de $(\Sigma, \Lambda_\Sigma, E_\Sigma)$.

2. Une feuille de $(\Sigma, \Lambda_\Sigma, E_\Sigma)$ est de dimension impaire si, et seulement si, T est tangent à la feuille correspondante de (M, Λ). Alors, la dimension de la feuille considérée de $(\Sigma, \Lambda_\Sigma, E_\Sigma)$ est inférieure d'une unité à celle de la feuille correspondante de (M, Λ).

Afin de déterminer, pratiquement, le couple $(\Lambda_\Sigma, E_\Sigma)$ de champs de tenseurs définissant sur Σ la structure de Jacobi induite par la structure de Poisson homogène (Λ, T) de M, on suit la procédure suivante. i) On détermine la fonction a égale à 1 sur Σ et homogène de degré 1 relativement à T, i.e. $L_T a = a$. ii) On calcule les champs de tenseurs Λ^a et E^a définissant sur un voisinage tubulaire U de Σ dans M la structure de Jacobi a-conforme à sa structure de Poisson. iii) On note $\pi : U \to \Sigma$ la projection de U sur Σ parallèlement aux courbes intégrales de T et on projette Λ^a et E^a sur Σ par π. π étant un morphisme de Jacobi de (U, Λ^a, E^a) sur $(\Sigma, \Lambda_\Sigma, E_\Sigma)$, on a

$$\Lambda_\Sigma = \pi_* \Lambda^a \qquad \text{et} \qquad E_\Sigma = \pi_* E^a. \tag{12}$$

On remarque que lorsque une variété de Poisson (M,Λ) possède un champ d'homothéties T, i.e. $L_T\Lambda=-\Lambda$, celui-ci n'est pas unique. Chaque champ de vecteurs de type $T+X$, où X est un automorphisme de Poisson infinitésimal de Λ, i.e. $L_X\Lambda=0$, est aussi un champ d'homothéties de Λ. Soit Σ une sous-variété de M de codimension 1 transverse à deux champs d'homothéties différents de Λ. L'influence du choix de champ d'homothéties sur la structure de Jacobi induite sur Σ par la structure de Poisson homogène de M va être étudiée ci-après.

Lemme 2.1 *Soit (M,Λ,T) une variété de Poisson homogène, Σ une sous-variété de M de codimension 1 transverse au champ d'homothéties T, et $(\Lambda_\Sigma,E_\Sigma)$ la structure de Jacobi induite sur Σ par la structure de Poisson homogène (Λ,T) de M. Alors, un champ de vecteurs T' sur M est un champ d'homothéties de Λ si et seulement s'il est de la forme*

$$T'=X+hT,$$

où X est un champ de vecteurs tangent à Σ et h une fonction différentiable vérifiant les relations :

$$[X,\Lambda_\Sigma]+[X,T]\wedge E_\Sigma-h\Lambda_\Sigma=-\Lambda_\Sigma, \tag{13}$$

$$[X,E_\Sigma]+[h,\Lambda_\Sigma]-(h+\langle dh,T\rangle)E_\Sigma=-E_\Sigma. \tag{14}$$

Démonstration : Soit p un point de Σ en lequel T est non nul et Σ est transverse à T. En restreignant éventuellement Σ, on peut supposer qu'il existe un voisinage ouvert U de p dans M s'identifiant au produit $\Sigma\times I$ de la sous-variété Σ et d'un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ contenant 0. En conséquence, la sous-variété Σ s'identifie à $\Sigma\times\{0\}$, et le champ de vecteurs T, restreint à U, s'identifie au champ de vecteurs dont les projections sur Σ et sur I sont, respectivement, le champ nul et le champ constant égal à 1, i.e., si t est la coordonnée canonique sur I, $T=\frac{\partial}{\partial t}$. Alors, d'après les relations (11) et (12), sur le voisinage U de p,

$$\Lambda=\frac{1}{a}(\Lambda_\Sigma+T\wedge E_\Sigma), \tag{15}$$

où a est la fonction homogène de degré 1 relativement à T, i.e. $L_Ta=a$, définie sur $U=\Sigma\times I$ par $a(x,t)=e^t$, dont la restriction à Σ est égale à 1. Aussi, chaque champ de vecteurs T' sur U s'écrit sous la forme

$$T'=X+hT,$$

où X est un champ de vecteurs tangent à Σ et h est une fonction différentiable sur U.

On vérifie aisément que T' est un champ d'homothéties de Λ, i.e. $[T',\Lambda]=-\Lambda$, si, et seulement si, X et h satisfont les relations (13) et (14).$\diamondsuit$

Remarque 2.1 *Evidemment, T' est transverse en p à Σ si, et seulement si, $h(p)\neq 0$. Lorsque c'est le cas, en restreignant éventuellement U, on peut supposer que h ne s'annule pas sur U.*

Lemme 2.2 *Les hypothèses et les notations étant les mêmes que dans les précédents, soit $T'=X+hT$ un champ d'homothéties de Λ, avec h ne s'annulant pas sur U. Les fonctions homogènes de degré 1 relativement à T', définies sur U et constantes sur Σ, sont les fonctions de type*

$$f(x,t)=F(x)\cdot\exp(\int\frac{dt}{h}) \tag{16}$$

vérifiant l'équation $L_Xf=0$, où F est une fonction différentiable arbitraire définie sur Σ.

Démonstration : Soit f une fonction différentiable définie sur $U = \Sigma \times I$ possédant les propriétés spécifiées ci-dessus. Alors, $L_{T'}f = \langle df, T'\rangle = f$ et $L_X f = \langle df, X\rangle = 0$. On a

$$\langle df, T'\rangle = \langle df, X + hT\rangle = \langle df, X\rangle + h\langle df, T\rangle = h\frac{\partial f}{\partial t} = f.$$

Donc,

$$f(x,t) = \exp(\int \frac{dt}{h} + \varphi(x)),$$

où φ est une fonction différentiable arbitraire indépendante de t. En posant $F(x) = \exp(\varphi(x))$, on retrouve la formule (16).$\diamondsuit$

On se place toujours dans le contexte des lemmes ci-dessus et on note $\pi : U \to \Sigma$, $U = \Sigma\times I$, la première projection qui n'est autre que la projection de U sur Σ parallèlement aux courbes intégrales de T. Soit $T' = X + hT$ un champ d'homothéties de (M, Λ) différent de T, ne s'annulant pas en p et transverse en p à Σ, i.e. $h(p) \neq 0$, et $\pi' : U \to \Sigma$ la projection de U sur Σ parallèlement aux courbes intégrales de T'. Après l'identification de U avec $\Sigma \times I$ et de T avec $\frac{\partial}{\partial t}$, π' est l'application qui à chaque point (x,t) de $U = \Sigma \times I$ fait correspondre l'unique point x' de Σ tel que $(x', 0)$ et (x,t) appartiennent à la même courbe intégrale de T'. Σ étant une sous-variété de (M, Λ, T') de codimension 1 transverse à T', elle possède une structure de Jacobi $(\Lambda'_\Sigma, E'_\Sigma)$ induite par (Λ, T'), au sens de la Proposition 2.1, telle que, π' soit un morphisme a'-conforme de Jacobi pour Λ et $(\Lambda'_\Sigma, E'_\Sigma)$, où a' est une fonction homogène de degré 1 relativement à T', i.e. $L_{T'}a' = a'$, définie sur U et égale à 1 sur Σ. La proposition ci-après donne la relation qui relie $(\Lambda_\Sigma, E_\Sigma)$ et $(\Lambda'_\Sigma, E'_\Sigma)$.

Proposition 2.2 *Les hypothèses et les notations étant les mêmes que dans les précédents, on a*

$$\Lambda'_\Sigma = \Lambda_\Sigma - \frac{1}{h_0} X_0 \wedge E_\Sigma,$$

où h_0 et X_0 sont, respectivement, les restrictions de h et de X à $\Sigma \times \{0\}$, identifiée à Σ, et

$$E'_\Sigma = \frac{1}{h_0} E_\Sigma.$$

Démonstration : Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage U_Σ de p dans Σ. On note F et G deux fonctions définies sur un voisinage de $(p, 0)$ dans $\Sigma \times I$, constantes sur chaque courbe intégrale de T', dont les restrictions à $\Sigma\times\{0\}$, identifiée à Σ, coïncident, respectivement, avec f et g. Puisque π' est une application a'-conforme de Jacobi pour Λ et $(\Lambda'_\Sigma, E'_\Sigma)$, on a

$$\Lambda'_\Sigma(df, dg) = a'\Lambda(dF, dG) \quad \text{ et } \quad E'_\Sigma = \pi'_*\left(\Lambda^\#(da')\right),$$

étant entendu que si le membre de gauche de la première équation est évalué au point x de U_Σ, le membre de droite de cette équation doit être évalué en un point (y,t) de $\Sigma \times I$ appartenant à la courbe intégrale de T' passant par $(x, 0)$. On peut considérer $y = x$ et $t = 0$.

On calcule dF et dG au point $(x, 0)$. On a

$$dF(x,0) = D_x F(x,0) + \frac{\partial F}{\partial t}(x,0)dt,$$

où $D_x F$ désigne la différentielle partielle de F par rapport aux variables x sur Σ. Comme $F(x,0) = f(x)$, $D_x F(x,0) = df(x)$. En plus, $\langle dF(x,0), T'(x,0)\rangle = 0$, puisque F est constante sur les courbes intégrales de T'. La dernière égalité nous donne

$$\langle \frac{\partial F}{\partial t}(x,0)dt, T(x,0)\rangle = -\frac{1}{h(x,0)}\langle df(x), X(x,0)\rangle.$$

Par suite,

$$dF(x,0) = df(x) - \frac{1}{h(x,0)}\langle df(x), X(x,0)\rangle dt$$

et, de même,

$$dG(x,0) = dg(x) - \frac{1}{h(x,0)}\langle dg(x), X(x,0)\rangle dt.$$

Alors, compte tenu de la relation (15) et du fait que $\langle dt, T\rangle = 1$,

$$\begin{aligned}
\Lambda'_{\Sigma(x)}(df(x), dg(x)) &= a'(x,0)\Lambda_{(x,0)}(dF(x,0), dG(x,0)) = \\
&= \frac{a'(x,0)}{a(x,0)}(\Lambda_\Sigma + T\wedge E_\Sigma)_{(x,0)}\Bigg(df(x) - \frac{1}{h(x,0)}\langle df(x), X(x,0)\rangle dt, \\
&\quad dg(x) - \frac{1}{h(x,0)}\langle dg(x), X(x,0)\rangle dt\Bigg) = \\
&= \Lambda_{\Sigma(x)}(df(x), dg(x)) - \frac{1}{h(x,0)}\langle df(x), X(x,0)\rangle\langle dg(x), E_\Sigma(x)\rangle + \\
&+ \frac{1}{h(x,0)}\langle dg(x), X(x,0)\rangle\langle df(x), E_\Sigma(x)\rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi, on trouve

$$\Lambda'_\Sigma = \Lambda_\Sigma - \frac{1}{h_0}X_0\wedge E_\Sigma,$$

où h_0 et X_0 désignent, respectivement, les restrictions de h et de X à $\Sigma\times\{0\}$.

D'autre part,

$$E'_\Sigma(x) = T_{(x,0)}\pi'\left(\Lambda^\#_{(x,0)}(da'(x,0))\right).$$

Mais, a' étant une fonction homogène de degré 1 relativement à T', égale à 1 sur Σ, elle est de type (16) et, en plus, $\Lambda^\#_{\Sigma(x)}(da'(x,0)) = 0$ et $\langle da'(x,0), E_\Sigma(x)\rangle = 0$. Alors,

$$\begin{aligned}
\Lambda^\#_{(x,0)}(da'(x,0)) &= \frac{1}{a(x,0)}\left(\Lambda^\#_{\Sigma(x)}(da'(x,0)) + \langle da'(x,0), T\rangle E_\Sigma - \langle da'(x,0), E_\Sigma\rangle T\right) = \\
&= \frac{\partial a'}{\partial t}(x,0)E_\Sigma = \\
&= \frac{a'(x,0)}{h(x,0)}E_\Sigma,
\end{aligned}$$

d'où on déduit que

$$E'_\Sigma = \frac{1}{h_0}E_\Sigma.\diamondsuit$$

Proposition 2.3 ([2]) *Soient (M_1, Λ_1, T_1) et (M_2, Λ_2, T_2) deux variétés de Poisson homogènes.*

1. *Le produit $M_1\times M_2$ muni du tenseur de Poisson $\Lambda_1+\Lambda_2$ et du champ d'homothéties T_1+T_2 est une variété de Poisson homogène.*

2. *Soit Σ_1 une sous-variété de codimension 1 de M_1 transverse à T_1, et $(\Lambda_{1\Sigma_1}, E_{1\Sigma_1})$ la structure de Jacobi induite sur Σ_1 par la structure de Poisson homogène (Λ_1, T_1) de M_1. Alors, $\Sigma_1 \times M_2$ est une sous-variété de codimension 1 de $M_1 \times M_2$ transverse à $T_1 + T_2$; le champ de bivecteurs $\Lambda_{\Sigma_1 \times M_2}$ et le champ de vecteurs $E_{\Sigma_1 \times M_2}$ qui définissent sa structure de Jacobi induite par $(\Lambda_1 + \Lambda_2, T_1 + T_2)$ sont donnés, respectivement, par les formules*

$$\Lambda_{\Sigma_1 \times M_2} = \Lambda_{1\Sigma_1} + \Lambda_2 - T_2 \wedge E_{1\Sigma_1} \quad et \quad E_{\Sigma_1 \times M_2} = E_{1\Sigma_1}.$$

Proposition 2.4 ([2]) *Soit (M, Λ, T) une variété de Poisson homogène, Σ et Σ' deux sous-variétés de codimension 1 de M transverses au champ d'homothéties T. On suppose qu'il existe une courbe intégrale de T rencontrant Σ en un point p et Σ' en un point p'. On munit Σ et Σ' des structures de Jacobi induites par la structure de Poisson homogène de M, au sens de la Proposition 2.1. Alors, il existe un difféomorphisme conforme de Jacobi d'un voisinage de p dans Σ sur un voisinage de p' dans Σ', appliquant p à p'.*

Proposition 2.5 ([2]) *À toute variété de Jacobi (M, Λ, E) on peut associer une variété de Poisson homogène $(\tilde{M}, \tilde{\Lambda}, \tilde{T})$ en considérant $\tilde{M} = M \times \mathbf{R}$,*

$$\tilde{\Lambda} = e^{-t}(\Lambda + \frac{\partial}{\partial t} \wedge E) \quad et \quad \tilde{T} = \frac{\partial}{\partial t},$$

où t est la coordonnée canonique sur le facteur $\mathbf{R}$. Alors,

1. *la projection $\pi : \tilde{M} \to M$ est un morphisme e^t-conforme de Jacobi;*

2. *la structure de Jacobi induite sur M, vue comme sous-variété de $\tilde{M}$ de codimension 1 transverse à $\tilde{T}$, par la structure de Poisson homogène de $\tilde{M}$, au sens de la Proposition 2.1, est la structure initialement donnée.*

La variété $(\tilde{M}, \tilde{\Lambda}, \tilde{T})$ s'appelle Poissonisation *de la variété de Jacobi (M, Λ, E).*

3 Structures de Jacobi compatibles

En généralisant la notion de compatibilité de deux tenseurs de Poisson (cf. [13]), on obtient de façon naturelle la notion de compatibilité de deux structures de Jacobi sur une variété différentiable M introduite dans [19] par un des auteurs. On rappelle et on complète ici quelques résultats de [19] sur les couples de structures de Jacobi compatibles, utiles dans la suite de notre étude.

Définition 3.1 *On dit que deux structures de Jacobi (Λ_0, E_0) et (Λ_1, E_1) sur une variété différentiable M sont* compatibles *si $(\Lambda_0 + \Lambda_1, E_0 + E_1)$ définit aussi une structure de Jacobi sur M, fait qui se traduit par les relations*

$$[\Lambda_0, \Lambda_1] = -E_0 \wedge \Lambda_1 - E_1 \wedge \Lambda_0 \quad et \quad [E_0, \Lambda_1] + [E_1, \Lambda_0] = 0.$$

Proposition 3.1 ([19]) *Soient (Λ_0, E_0) et (Λ_1, E_1) deux structures de Jacobi compatibles sur une variété différentiable M. Alors, pour toute fonction différentiable a sur M ne s'annulant en aucun point de M, les structures de Jacobi a-conformes (Λ_0^a, E_0^a) et (Λ_1^a, E_1^a), respectivement, à (Λ_0, E_0) et à (Λ_1, E_1) sont aussi compatibles sur M.*

Proposition 3.2 ([19]) *Deux structures de Jacobi* (Λ_0, E_0) *et* (Λ_1, E_1) *définies sur une variété différentiable* M *sont compatibles si, et seulement si, les tenseurs de Poisson homogènes* $\tilde{\Lambda}_0 = e^{-t}(\Lambda_0 + \frac{\partial}{\partial t} \wedge E_0)$ *et* $\tilde{\Lambda}_1 = e^{-t}(\Lambda_1 + \frac{\partial}{\partial t} \wedge E_1)$, *relativement à* $\frac{\partial}{\partial t}$, *associés, respectivement, à* (Λ_0, E_0) *et à* (Λ_1, E_1) *sont compatibles sur* $\tilde{M} = M \times \mathbf{R}$.

Définition 3.2 *On appelle* variété bihamiltonienne homogène, *et on note* $(M, \Lambda_0, \Lambda_1, T)$, *une variété différentiable* M *munie d'un couple* (Λ_0, Λ_1) *de tenseurs de Poisson compatibles au sens de Magri, i.e.* $\Lambda_0 + \Lambda_1$ *est aussi un tenseur de Poisson, et d'un champ de vecteurs* T *tel que,*

$$L_T\Lambda_0 = [T, \Lambda_0] = -\Lambda_0 \quad et \quad L_T\Lambda_1 = [T, \Lambda_1] = -\Lambda_1.$$

Proposition 3.3 *Soit* $(M, \Lambda_0, \Lambda_1, T)$ *une variété bihamiltonienne homogène. On note* Σ *et* Σ' *deux sous-variétés de codimension 1 de* M *transverses au champ d'homothéties* T. *On suppose qu'il existe une courbe intégrale de* T *rencontrant* Σ *en un point* p *et* Σ' *en un point* p'. *On munit* Σ *(resp.* Σ'*) du couple de structures de Jacobi compatibles* $((\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma}), (\Lambda_{1\Sigma}, E_{1\Sigma}))$ *(resp.* $((\Lambda_{0\Sigma'}, E_{0\Sigma'}), (\Lambda_{1\Sigma'}, E_{1\Sigma'}))$*) induit par la structure bihamiltonienne homogène de* M. *Alors, il existe un difféomorphisme conforme de Jacobi d'un voisinage de* p *dans* Σ *sur un voisinage de* p' *dans* Σ', *à la fois pour* $(\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma})$ *et* $(\Lambda_{0\Sigma'}, E_{0\Sigma'})$ *et pour* $(\Lambda_{1\Sigma}, E_{1\Sigma})$ *et* $(\Lambda_{1\Sigma'}, E_{1\Sigma'})$, *appliquant* p *à* p'.

Démonstration : D'abord, on remarque que le fait que les structures de Jacobi $(\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma})$ et $(\Lambda_{1\Sigma}, E_{1\Sigma})$ (resp. $(\Lambda_{0\Sigma'}, E_{0\Sigma'})$ et $(\Lambda_{1\Sigma'}, E_{1\Sigma'})$) sont compatibles est un résultat immédiat des Propositions 2.1, 2.5 et 3.2.

D'après la Proposition 2.4, il existe un difféomorphisme conforme de Jacobi ϕ_0 (resp. ϕ_1) d'un voisinage U_0 (resp. U_1) de p dans Σ sur un voisinage U_0' (resp. U_1') de p' dans Σ' appliquant : i) p à p' et ii) une structure a_0 (resp. a_1)-conforme à $(\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma})$ (resp. à $(\Lambda_{1\Sigma}, E_{1\Sigma})$) à $(\Lambda_{0\Sigma'}, E_{0\Sigma'})$ (resp. à $(\Lambda_{1\Sigma'}, E_{1\Sigma'})$). En reprenant la démonstration de la Proposition 2.4 (cf. [2]), on trouve que les difféomorphismes ϕ_0 et ϕ_1, ainsi que les fonctions a_0 et a_1, coïncident sur $U_0 \cap U_1$.$\diamondsuit$

4 Opérateur de Nijenhuis

Soit M une variété différentiable, et $\mathcal{N} : \mathcal{V}^1(M) \times C^\infty(M, \mathbf{R}) \to \mathcal{V}^1(M) \times C^\infty(M, \mathbf{R})$ une application $C^\infty(M, \mathbf{R})$-linéaire définie, pour tout couple $(X, f) \in \mathcal{V}^1(M) \times C^\infty(M, \mathbf{R})$, par

$$\mathcal{N}(X, f) = (NX + fY, \langle \gamma, X \rangle + gf), \tag{17}$$

où N est un champ de tenseurs sur M de type (1,1), Y est un champ de vecteurs sur M, γ est une 1-forme sur M, et g est une fonction différentiable sur M. $\mathcal{N} := (N, Y, \gamma, g)$ peut être aussi vu comme un morphisme de fibrés vectoriels $\mathcal{N} : TM \times \mathbf{R} \to TM \times \mathbf{R}$. Comme l'espace $\mathcal{V}^1(M) \times C^\infty(M, \mathbf{R})$ muni du crochet

$$[\,,\,] : \left(\mathcal{V}^1(M) \times C^\infty(M, \mathbf{R})\right)^2 \to \mathcal{V}^1(M) \times C^\infty(M, \mathbf{R}),$$

qui, à tout $((X, f), (Z, h)) \in \left(\mathcal{V}^1(M) \times C^\infty(M, \mathbf{R})\right)^2$, fait correspondre le couple

$$[(X, f), (Z, h)] = ([X, Z], \langle dh, X \rangle - \langle df, Z \rangle),$$

est une algèbre de Lie réelle, on peut déterminer, de manière naturelle, la *torsion de Nijenhuis* $\mathcal{T}(\mathcal{N})$ de $\mathcal{N}$. Elle est une application $C^\infty(M, \mathbf{R})$-bilinéaire

$$\mathcal{T}(\mathcal{N}) : \left(\mathcal{V}^1(M) \times C^\infty(M, \mathbf{R})\right)^2 \to \mathcal{V}^1(M) \times C^\infty(M, \mathbf{R})$$

définie, pour tout $((X, f), (Z, h)) \in (\mathcal{V}^1(M) \times C^\infty(M, \mathbf{R}))^2$, par

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathcal{N})\,((X, f), (Z, h)) &= [\mathcal{N}(X, f), \mathcal{N}(Z, h)] - \mathcal{N}[\mathcal{N}(X, f), (Z, h)] - \\ &- \mathcal{N}[(X, f), \mathcal{N}(Z, h)] + \mathcal{N}^2[(X, f), (Z, h)]. \end{aligned}$$

Définition 4.1 *On dit qu'une application* $\mathcal{N} : \mathcal{V}^1(M) \times C^\infty(M, \mathbf{R}) \to \mathcal{V}^1(M) \times C^\infty(M, \mathbf{R})$*,* $C^\infty(M, \mathbf{R})$*-linéaire, est un* opérateur de Nijenhuis *sur* M*, si sa torsion de Nijenhuis* $\mathcal{T}(\mathcal{N})$ *est identiquement nulle sur* M*.*

La notion d'*opérateur de Nijenhuis* introduite ci-dessus est une généralisation de la notion de *tenseur de Nijenhuis*. On rappelle qu'un *tenseur de Nijenhuis* sur une variété différentiable M est un champ de tenseurs N sur M de type (1,1) dont la torsion de Nijenhuis

$$\begin{aligned} T(N)(X, Z) &= [NX, NZ] - N[NX, Z] - N[X, NZ] + N^2[X, Z] = \\ &= (L_{NX}N - NL_X N)Z, \qquad (X, Z \in \mathcal{V}^1(M)), \end{aligned}$$

s'annule identiquement sur M.

À partir de $\mathcal{N} := (N, Y, \gamma, g)$ on définit sur $\tilde{M} = M \times \mathbf{R}$ un champ de tenseurs $\tilde{N}$ de type (1,1) en posant

$$\tilde{N} = N + Y \otimes dt + \frac{\partial}{\partial t} \otimes \gamma + g \frac{\partial}{\partial t} \otimes dt, \tag{18}$$

où t est la coordonnée canonique sur le facteur $\mathbf{R}$.

Proposition 4.1 ([20]) *Le champ de tenseurs* $\tilde{N}$ *sur* $\tilde{M} = M \times \mathbf{R}$ *est de Nijenhuis si, et seulement si,*

$$T(N) = Y \otimes d\gamma, \tag{19}$$

$$L_N \gamma = g d\gamma, \tag{20}$$

$$L_Y N = -Y \otimes dg, \tag{21}$$

$$^t N(dg) = L_Y \gamma + g dg, \tag{22}$$

où $T(N)$ *dénote la torsion de Nijenhuis de* N*,* $L_N \gamma$ *est l'opérateur sur* M *défini, pour tous* $X, Z \in \mathcal{V}^1(M)$*, par*

$$L_N \gamma(X, Z) = d\gamma(NX, Z) + d\gamma(X, NZ) - d(^t N \gamma)(X, Z),$$

et $^t N$ *désigne l'application transposée de* N*.*

On prouve facilement que les relations (19)-(22) entraînent que $\mathcal{N} := (N, Y, \gamma, g)$ est un opérateur de Nijenhuis sur M, et réciproquement. Ainsi, on conclut :

Proposition 4.2 *Soit* M *une variété différentiable de dimension finie, et* $\mathcal{N} := (N, Y, \gamma, g)$ *une application* $C^\infty(M, \mathbf{R})$*-linéaire sur* M *définie par (17).* $\mathcal{N}$ *est un opérateur de Nijenhuis sur* M *si, et seulement si, le champ de tenseurs* $\tilde{N}$ *associé sur* $\tilde{M}$*, défini par (18), est de Nijenhuis sur* $\tilde{M}$*.*

5 Variétés de Jacobi-Nijenhuis

Soit M une variété différentiable de dimension finie munie d'une structure de Jacobi (Λ_0, E_0) et d'une application $C^\infty(M,\mathbf{R})$-linéaire $\mathcal{N} : \mathcal{V}^1(M) \times C^\infty(M,\mathbf{R}) \to \mathcal{V}^1(M) \times C^\infty(M,\mathbf{R})$, $\mathcal{N} := (N, Y, \gamma, g)$, définie par (17). À partir de (Λ_0, E_0) et de $\mathcal{N}$ on construit sur M un champ de tenseurs Λ_1 de type (2,0) et un champ de vecteurs E_1 caractérisés par la relation

$$(\Lambda_1, E_1)^\# = \mathcal{N} \circ (\Lambda_0, E_0)^\#. \tag{23}$$

En cherchant à préciser les conditions sous lesquelles le couple (Λ_1, E_1) définit sur M une nouvelle structure de Jacobi compatible avec (Λ_0, E_0), au sens de la Définition 3.1, on trouve (cf. [17]) :

1. L'antisymétrie de Λ_1 est assurée si, et seulement si,

$$\mathcal{N} \circ (\Lambda_0, E_0)^\# = (\Lambda_0, E_0)^\# \circ {}^t\mathcal{N}, \tag{24}$$

   où ${}^t\mathcal{N}$ désigne l'opérateur transposé de $\mathcal{N}$. Cette condition est équivalente au système de conditions :

$$NE_0 = \Lambda_0^\#(\gamma) + gE_0, \tag{25}$$

$$N\Lambda_0^\# - Y \otimes E_0 = \Lambda_0^\# \, {}^tN + E_0 \otimes Y, \tag{26}$$

$$\langle \gamma, E_0 \rangle = 0. \tag{27}$$

   Alors,

$$\Lambda_1^\# = N\Lambda_0^\# - Y \otimes E_0 = \Lambda_0^\# \, {}^tN + E_0 \otimes Y, \tag{28}$$

$$E_1 = NE_0 = \Lambda_0^\#(\gamma) + gE_0. \tag{29}$$

2. Lorsque Λ_1 est antisymétrique, (Λ_1, E_1) définit sur M une structure de Jacobi si, et seulement si, pour tous couples $(\alpha, f), (\beta, h) \in \Omega^1(M) \times C^\infty(M,\mathbf{R})$,

$$\begin{gathered}\mathcal{T}(\mathcal{N}) \Big((\Lambda_0, E_0)^\#(\alpha, f), (\Lambda_0, E_0)^\#(\beta, h) \Big) = \\ = \mathcal{N} \circ (\Lambda_0, E_0)^\# \left(\mathcal{C}\left((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N}\right)\left((\alpha, f), (\beta, h)\right)\right).\end{gathered}$$

   Dans l'expression ci-dessus, $\mathcal{C}((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$ désigne le concomitant de (Λ_0, E_0) et de $\mathcal{N}$ défini, pour tous $(\alpha, f), (\beta, h) \in \Omega^1(M) \times C^\infty(M,\mathbf{R})$, par

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\left((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N}\right)\left((\alpha, f), (\beta, h)\right) &= \boldsymbol{\{}(\alpha, f), (\beta, h)\boldsymbol{\}}_1 - \boldsymbol{\{}{}^t\mathcal{N}(\alpha, f), (\beta, h)\boldsymbol{\}}_0 - \\ &- \boldsymbol{\{}(\alpha, f), {}^t\mathcal{N}(\beta, h)\boldsymbol{\}}_0 + {}^t\mathcal{N}\boldsymbol{\{}(\alpha, f), (\beta, h)\boldsymbol{\}}_0,\end{aligned}$$

   ($\boldsymbol{\{}\, , \boldsymbol{\}}_i$ étant le crochet (6) associé à (Λ_i, E_i), $i = 0, 1$).

3. Lorsque (Λ_1, E_1) est de Jacobi, elle est compatible avec (Λ_0, E_0) si, et seulement si, pour tous $(\alpha, f), (\beta, h) \in \Omega^1(M) \times C^\infty(M,\mathbf{R})$,

$$(\Lambda_0, E_0)^\# \left(\mathcal{C}\left((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N}\right)\left((\alpha, f), (\beta, h)\right)\right) = 0.$$

On introduit donc la définition suivante.

Définition 5.1 *Une* structure de Jacobi-Nijenhuis *sur une variété différentiable M est définie par la donnée d'une structure de Jacobi (Λ_0, E_0) et d'un opérateur de Nijenhuis $\mathcal{N}$ compatibles entre eux, i.e. i) $\mathcal{N} \circ (\Lambda_0, E_0)^\# = (\Lambda_0, E_0)^\# \circ {}^t\mathcal{N}$ et ii) l'application $(\Lambda_0, E_0)^\# \circ \mathcal{C}((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N}) : (\Omega^1(M) \times C^\infty(M, \mathbf{R}))^2 \to \mathcal{V}^1(M) \times C^\infty(M, \mathbf{R})$ s'annule identiquement sur M.*

On dit que $(M, (\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$ est une variété de Jacobi-Nijenhuis. *$\mathcal{N}$ s'appelle* opérateur de récursion *de $(M, (\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$.*

Remarque 5.1 *La notion de structure de Jacobi-Nijenhuis définie ci-dessus est une notion plus stricte que celle introduite dans [17]. Dans la Définition 5.1, on demande que la torsion de Nijenhuis $\mathcal{T}(\mathcal{N})$ de $\mathcal{N}$ soit identiquement nulle sur M, tandis que, selon la définition de [17], il est demandé que $\mathcal{T}(\mathcal{N})$ s'annule sur l'image de $(\Lambda_0, E_0)^\#$.*

Soit $(M, (\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$ une variété de Jacobi-Nijenhuis, (Λ_1, E_1) la structure de Jacobi associée à $(\Lambda_1, E_1)^\# = \mathcal{N} \circ (\Lambda_0, E_0)^\#$, qui est compatible avec (Λ_0, E_0), et a une fonction différentiable définie sur M, ne s'annulant en aucun point. On considère les structures de Jacobi (Λ_0^a, E_0^a) et (Λ_1^a, E_1^a) a-conformes, respectivement, à (Λ_0, E_0) et à (Λ_1, E_1). D'après la Proposition 3.1, (Λ_0^a, E_0^a) et (Λ_1^a, E_1^a) sont compatibles. On se demande s'il existe un opérateur de Nijenhuis $\mathcal{N}^a := (N^a, Y^a, \gamma^a, g^a)$, compatible avec (Λ_0^a, E_0^a), tel que $(\Lambda_1^a, E_1^a)^\# = \mathcal{N}^a \circ (\Lambda_0^a, E_0^a)^\#$.

Proposition 5.1 *Les hypothèses et les notations étant les mêmes que ci-dessus, alors le couple $((\Lambda_0^a, E_0^a), (\Lambda_1^a, E_1^a))$ possède un opérateur de récursion $\mathcal{N}^a := (N^a, Y^a, \gamma^a, g^a)$, où*

$$N^a = N - Y \otimes \frac{da}{a},$$
$$Y^a = Y,$$
$$\gamma^a = \gamma + {}^tN\frac{da}{a} - (g + \frac{1}{a}L_Y a)\frac{da}{a},$$
$$g^a = g + \frac{1}{a}L_Y a.$$

Démonstration : De la formule (11) concernant les structures a-conformes de Jacobi, et en tenant compte des conditions (25)-(27), on déduit les expressions enoncées des N^a, Y^a, γ^a et g^a. On vérifie aisément que $\mathcal{N}^a := (N^a, Y^a, \gamma^a, g^a)$ est un opérateur de Nijenhuis. Bien entendu, il est compatible avec (Λ_0^a, E_0^a) puisque (Λ_1^a, E_1^a) est une structure de Jacobi compatible avec (Λ_0^a, E_0^a).$\diamondsuit$

On dit que la structure de Jacobi-Nijenhuis $((\Lambda_0^a, E_0^a), \mathcal{N}^a)$ est *a-conforme* à $((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$.

Définition 5.2 ([6], [7]) *On appelle* variété de Poisson-Nijenhuis, *et on note (M, Λ_0, N), une variété de Poisson (M, Λ_0) munie d'un tenseur de Nijenhuis N compatible avec Λ_0, i.e. i) $N\Lambda_0^\# = \Lambda_0^\#\, {}^tN$, où ${}^tN$ désigne le transposé de N, et ii) l'application $\Lambda_0^\# \circ C(\Lambda_0, N) : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \to \mathcal{V}^1(M)$ s'annule identiquement sur M. $C(\Lambda_0, N)$ désigne le concomitant de Magri-Morosi de Λ_0 et de N défini, pour tout $(\alpha, \beta) \in \Omega^1(M) \times \Omega^1(M)$, par*

$$C(\Lambda_0, N)(\alpha, \beta) = \{\alpha, \beta\}_1 - \{{}^tN\alpha, \beta\}_0 - \{\alpha, {}^tN\beta\}_0 + {}^tN\{\alpha, \beta\}_0,$$

($\{\,,\,\}_i$ étant le crochet associé à Λ_i, $\Lambda_i^\# = N^i\Lambda_0^\#$, $i = 0, 1$, qui munit l'espace $\Omega^1(M)$ d'une structure d'algèbre de Lie).

N s'appelle opérateur de récursion *de (M, Λ_0, N).*

Définition 5.3 *Une variété de Poisson-Nijenhuis (M, Λ_0, N) munie d'un champ de vecteurs T tel que,*

$$L_T\Lambda_0 = [T, \Lambda_0] = -\Lambda_0 \quad et \quad L_TN = 0, \tag{30}$$

s'appelle variété de Poisson-Nijenhuis homogène.

Remarque 5.2 *Les variétés de Poisson-Nijenhuis homogènes constituent une classe particulière de variétés bihamiltoniennes homogènes, (cf. Définition 3.2). Des conditions (30), il résulte que $L_T\Lambda_1 = [T, \Lambda_1] = -\Lambda_1$, où Λ_1 est le tenseur de Poisson associé à $\Lambda_1^{\#} = N\Lambda_0^{\#}$. En plus, il vient que T est un champ d'homothéties de chaque membre de la hiérarchie $(\Lambda_k, k \in \mathbf{N})$, $\Lambda_k^{\#} = N^k\Lambda_0^{\#}$, de tenseurs de Poisson deux à deux compatibles engendrée sur M par Λ_0 et N, i.e., pour tout $k \in \mathbf{N}$, $L_T\Lambda_k = [T, \Lambda_k] = -\Lambda_k$.*

Proposition 5.2 *Soit (M, Λ_0, N, T) une variété de Poisson-Nijenhuis homogène, et Σ une sous-variété de M de codimension 1 transverse à T. Alors, (Λ_0, N, T) induit sur Σ une structure de Jacobi-Nijenhuis $((\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma}), \mathcal{N}_\Sigma)$, $\mathcal{N}_\Sigma := (N_\Sigma, Y_\Sigma, \gamma_\Sigma, g_\Sigma)$, caractérisée par les suivants.*

1. *$(\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma})$ est la structure de Jacobi induite sur Σ par la structure de Poisson homogène (Λ_0, T) de M, au sens de la Proposition 2.1.*

2. *$\mathcal{N}_\Sigma := (N_\Sigma, Y_\Sigma, \gamma_\Sigma, g_\Sigma)$ est l'opérateur de Nijenhuis induit sur Σ par la structure (N, T) de M, au sens précisé ci-après. Soit $\pi : U \to \Sigma$ la projection sur Σ d'un voisinage tubulaire U de Σ dans M tel que, pour tout $x \in \Sigma$, $\pi^{-1}(x)$ soit un arc connexe de courbe intégrale de T, et a une fonction définie sur U, ne s'annulant en aucun point de U, égale à 1 sur Σ et homogène de degré 1 relativement à T, comme dans la Proposition 2.1. Alors, N_Σ est le champ de tenseurs de type (1,1) sur Σ induit par N, Y_Σ est la projection sur $T\Sigma$ par π de $(NT)|_\Sigma$, γ_Σ est celle de $({}^tN\frac{da}{a})|_\Sigma$ sur $T^*\Sigma$, et g_Σ est le coefficient de la composante de $(NT)|_\Sigma$ selon la direction de T.*

Démonstration : Soit a une fonction sur U possédant les propriétés spécifiées ci-dessus. Comme a est supposée homogène de degré 1 relativement à T, i.e. $L_Ta = a$, et non-nulle sur U, on a $\langle \frac{da}{a}, T\rangle = 1$ et $L_T\frac{da}{a} = 0$. Alors, en chaque point x de U, $\frac{da}{a}(x)$ engendre un sous-espace de T_x^*U de dimension 1 qui est l'espace complémentaire de l'annulateur $\langle T(x)\rangle^\circ$ du sous-espace $\langle T(x)\rangle$ de T_xU engendré par $T(x)$. En plus, $(\frac{da}{a})|_\Sigma = (da)|_\Sigma$ est une section de l'annulateur de $T\Sigma$.

On considère la projection $\pi : U \to \Sigma$ parallèlement aux courbes intégrales de T. On note $T_\Sigma\pi : T_\Sigma U \to T\Sigma$ le morphisme de projection du fibré vectoriel $T_\Sigma U$ sur son sous-fibré $T\Sigma$ et ${}^tT_\Sigma\pi : T^*\Sigma \to T_\Sigma^*U$ le morphisme transposé. On a

$$T_\Sigma\pi = Id_{T_\Sigma U} - (T \otimes \frac{da}{a})|_\Sigma, \tag{31}$$

et ${}^tT_\Sigma\pi$ est l'injection qui prolonge chaque forme linéaire sur Σ à une forme linéaire sur U qui s'annule sur $ker\,(T_\Sigma\pi) = \langle T|_\Sigma\rangle$. Alors, comme on a vu (cf. §2),

$$\Lambda_{0\Sigma}^{\#} = T_\Sigma\pi \circ (a\Lambda_0^{\#})|_\Sigma \circ {}^tT_\Sigma\pi, \tag{32}$$

$$E_{0\Sigma} = T_\Sigma\pi(\Lambda_0^{\#}(da)|_\Sigma) \overset{(31)}{=} (\Lambda_0^{\#}(da))|_\Sigma. \tag{33}$$

Sans doute, la restriction de Λ_0 à U peut être écrite sous la forme

$$\Lambda_0 = \frac{1}{a}(\Lambda_{0\Sigma} + T \wedge E_{0\Sigma}). \tag{34}$$

D'autre part, puisque $L_T N = 0$, la restriction de N à U s'écrit sous la forme

$$N = N_\Sigma + Y_\Sigma \otimes \frac{da}{a} + T \otimes \gamma_\Sigma + g_\Sigma T \otimes \frac{da}{a}, \tag{35}$$

où N_Σ est un champ de tenseurs de type (1,1) défini sur Σ, Y_Σ est un champ de vecteurs défini sur Σ, γ_Σ est une 1-forme définie sur Σ, et g_Σ est une fonction différentiable sur Σ. Comme la restriction de $T_\Sigma\pi : T_\Sigma U \to T\Sigma$ au sous-fibré horizontal $T\Sigma$ de $T_\Sigma U$, notée $(T_\Sigma\pi)_h$, est une bijection, $N|_\Sigma : T_\Sigma U \to T_\Sigma U$ induit sur Σ un champ de tenseurs de type (1,1) défini par $T_\Sigma\pi \circ N|_\Sigma \circ (T_\Sigma\pi)_h^{-1}$. On vérifie aisément que celui-ci n'est autre que N_Σ, i.e.

$$N_\Sigma = T_\Sigma\pi \circ N|_\Sigma \circ (T_\Sigma\pi)_h^{-1}. \tag{36}$$

Par ailleurs, Y_Σ peut être vu comme la projection sur $T\Sigma$ de $(NT)|_\Sigma$, i.e.

$$Y_\Sigma = T_\Sigma\pi((NT)|_\Sigma) \overset{(31)}{=} (NT)|_\Sigma - (i((NT)|_\Sigma)(da)|_\Sigma)\, T|_\Sigma, \tag{37}$$

γ_Σ comme la projection de $({}^tN\frac{da}{a})|_\Sigma$ sur $T^*\Sigma$, i.e.

$$\gamma_\Sigma = ({}^tN\frac{da}{a})|_\Sigma - \langle({}^tN\frac{da}{a})|_\Sigma, T|_\Sigma\rangle da|_\Sigma, \tag{38}$$

et g_Σ comme le coefficient de la composante de $(NT)|_\Sigma$ selon la direction de $T|_\Sigma$, i.e.

$$g_\Sigma = \langle(\frac{da}{a})|_\Sigma, (NT)|_\Sigma\rangle. \tag{39}$$

Ainsi, à partir de $N = N_\Sigma + Y_\Sigma \otimes \frac{da}{a} + T \otimes \gamma_\Sigma + g_\Sigma T \otimes \frac{da}{a}$ on définit sur Σ un opérateur $C^\infty(\Sigma, \mathbf{R})$-linéaire $\mathcal{N}_\Sigma : \mathcal{V}^1(\Sigma) \times C^\infty(\Sigma, \mathbf{R}) \to \mathcal{V}^1(\Sigma) \times C^\infty(\Sigma, \mathbf{R})$ en posant, pour tout $(X, f) \in \mathcal{V}^1(\Sigma) \times C^\infty(\Sigma, \mathbf{R})$,

$$\mathcal{N}_\Sigma(X, f) = (N_\Sigma X + fY_\Sigma, \langle\gamma_\Sigma, X\rangle + g_\Sigma f). \tag{40}$$

Bien entendu, le champ de tenseurs N sur U peut être considéré comme le champ associé à $\mathcal{N}_\Sigma := (N_\Sigma, Y_\Sigma, \gamma_\Sigma, g_\Sigma)$, au sens du paragraphe 4. Alors, d'après la Proposition 4.2, puisque N est un tenseur de Nijenhuis sur U, $\mathcal{N}_\Sigma$ est un opérateur de Nijenhuis sur Σ. On va vérifier s'il est compatible avec la structure de Jacobi $(\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma})$ de Σ.

D'après la Définition 5.1, il faut que : i) $\mathcal{N}_\Sigma \circ (\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma})^\# = (\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma})^\# \circ {}^t\mathcal{N}_\Sigma$ et ii) l'application $(\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma})^\# \circ \mathcal{C}\left((\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma}), \mathcal{N}_\Sigma\right)$ soit identiquement nulle sur Σ. Mais, après un calcul assez long, on confirme que les conditions ci-dessus sont, respectivement, aussi satisfaites si, et seulement si, les champs de tenseurs Λ_0 et N (cf., resp., formules (34) et (35)) vérifient les relations

$$N\Lambda_0^\# = \Lambda_0^\#\, {}^tN \quad \text{et} \quad \Lambda_0^\# \circ C(\Lambda_0, N) = 0. \tag{41}$$

À cause du fait que (Λ_0, N) munit la variété M d'une structure de Poisson-Nijenhuis, (41) est, par définition, vérifiée. Par suite, les conditions (i) et (ii) sont vraies, d'où la compatibilité de $(\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma})$ avec $\mathcal{N}_\Sigma$ sur Σ.$\diamondsuit$

Remarque 5.3 *Soit* $((\Lambda_k, k \in \mathbf{N}), T)$, $\Lambda_k^\# = N^k \Lambda_0^\#$, *la hiérarchie de tenseurs de Poisson homogènes, relativement à* T, *deux à deux compatibles, engendrée sur* M *par* (Λ_0, N), *(cf. Remarque 5.2). Chaque membre* (Λ_k, T) *de cette hiérarchie induit sur* Σ *une structure de Jacobi* $(\Lambda_{k\Sigma}, E_{k\Sigma})$, *au sens de la Proposition 2.1. Ainsi, on obtient sur* Σ *une suite* $((\Lambda_{k\Sigma}, E_{k\Sigma}), k \in \mathbf{N})$ *de structures de Jacobi. On vérifie facilement qu'elles sont deux à deux compatibles et que, pour tout* $k \in \mathbf{N}$, $(\Lambda_{k\Sigma}, E_{k\Sigma})$ *coïncide avec la structure définie par*

$$(\Lambda_{k\Sigma}, E_{k\Sigma})^\# = \mathcal{N}_\Sigma^k \circ (\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma})^\#.$$

Comme au paragraphe 2, on remarque que lorsque une variété de Poisson-Nijenhuis (M, Λ_0, N) possède un champ de vecteurs T vérifiant (30), celui-ci n'est pas unique; tous les champs de vecteurs de type $T+X$, où X est un automorphisme de Poisson infinitésimal de Λ_0 tel que $L_X N = 0$, vérifient aussi les conditions (30). Soit Σ une sous-variété de M de codimension 1 transverse à deux champs d'homothéties différents T et T' de Λ_0 tels que $L_T N = 0$ et $L_{T'} N = 0$. Dans le paragraphe 2, on a étudié l'influence du choix d'un tel champ de vecteurs sur la structure de Jacobi induite sur Σ par la structure de Poisson homogène de M. Dans la suite, on va étudier l'influence de ce choix sur l'opérateur de Nijenhuis induit sur Σ par le tenseur de Nijenhuis de M.

Lemme 5.1 *Soit* (M, Λ_0, N, T) *une variété de Poisson-Nijenhuis homogène,* Σ *une sous-variété de* M *de codimension 1 transverse à* T, *et* $((\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma}), \mathcal{N}_\Sigma)$, $\mathcal{N}_\Sigma := (N_\Sigma, Y_\Sigma, \gamma_\Sigma, g_\Sigma)$, *la structure de Jacobi-Nijenhuis induite sur* Σ *par la structure de Poisson-Nijenhuis homogène* (Λ_0, N, T) *de* M, *au sens de la Proposition 5.2. Alors, un champ de vecteurs* T' *sur* M *vérifie les relations (30) si et seulement s'il est de la forme*

$$T' = X + hT,$$

où X *est un champ de vecteurs tangent à* Σ *et* h *une fonction différentiable vérifiant les relations (13) et (14) et, en plus, les suivantes :*

$$L_X N_\Sigma + Y_\Sigma \otimes Dh + [X, T] \otimes \gamma_\Sigma + ([X, Y_\Sigma] + \langle dh, T\rangle Y_\Sigma + g_\Sigma [X, T]) \otimes \frac{da}{a} = 0, \tag{42}$$

$$- {}^t N_\Sigma Dh + i(X) d\gamma_\Sigma + D(\langle \gamma_\Sigma, X\rangle) - \langle dh, T\rangle \gamma_\Sigma + g_\Sigma Dh = 0, \tag{43}$$

$$-L_{Y_\Sigma} h + L_X g_\Sigma + \langle d(\langle \gamma_\Sigma, X\rangle), T\rangle = 0, \tag{44}$$

où D *désigne la différentielle partielle par rapport aux variables sur* Σ.

Démonstration : On reprend la démonstration du Lemme 2.1 et on demande que le champ de vecteurs $T' = X + hT$ satisfasse en plus la condition $L_{T'} N = 0$. En tenant compte de l'expression (35) de N, on vérifie facilement que $L_{T'} N = 0$ si, et seulement si, le champ de vecteurs X et la fonction h satisfont les relations (42)-(44).$\diamondsuit$

Proposition 5.3 *Soit* (M, Λ_0, N, T) *une variété de Poisson-Nijenhuis homogène,* Σ *une sous-variété de* M *de codimension 1 transverse à* T, *et* $T' = X + hT$ *un champ de vecteurs sur* M, *différent de* T *et transverse à* Σ, *tel que,* (Λ_0, N, T') *définisse aussi une structure de Poisson-Nijenhuis homogène sur* M. *On munit* Σ *des structures de Jacobi-Nijenhuis* $((\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma}), \mathcal{N}_\Sigma)$, $\mathcal{N}_\Sigma := (N_\Sigma, Y_\Sigma, \gamma_\Sigma, g_\Sigma)$, *et* $((\Lambda'_{0\Sigma}, E'_{0\Sigma}), \mathcal{N}'_\Sigma)$, $\mathcal{N}'_\Sigma := (N'_\Sigma, Y'_\Sigma, \gamma'_\Sigma, g'_\Sigma)$, *induites, respectivement, par les structures de Poisson-Nijenhuis homogènes* (Λ_0, N, T) *et* (Λ_0, N, T') *de* M*, au sens de la Proposition 5.2. Alors,*

$$\Lambda'_{0\Sigma} = \Lambda_{0\Sigma} - \frac{1}{h_0} X_0 \wedge E_{0\Sigma} \quad \text{et} \quad E'_{0\Sigma} = \frac{1}{h_0} E_{0\Sigma}, \tag{45}$$

$$N'_{\Sigma} = N_{\Sigma} - \frac{1}{h_0} X_0 \otimes \gamma_{\Sigma}, \tag{46}$$

$$Y'_{\Sigma} = N_{\Sigma} X_0 - \frac{1}{h_0} \langle \gamma_{\Sigma}, X_0 \rangle X_0 + h_0 Y_{\Sigma} - g_{\Sigma} X_0, \tag{47}$$

$$\gamma'_{\Sigma} = \frac{1}{h_0} \gamma_{\Sigma}, \tag{48}$$

$$g'_{\Sigma} = g_{\Sigma} + \frac{1}{h_0} \langle \gamma_{\Sigma}, X_0 \rangle, \tag{49}$$

où X_0 *et* h_0 *sont, respectivement, les restrictions de* X *et de* h *sur* Σ*.*

Démonstration : Les formules (45) sont le résultat de la Proposition 2.2. Afin de prouver les (46)-(49), on fait les identifications que l'on a fait pour la démonstration des Lemmes 2.1 et 5.1 et des Propositions 2.2 et 5.2. Soient $\pi' : U \to \Sigma$ la projection parallèlement aux courbes intégrales de T' et a' une fonction homogène de degré 1 relativement à T' définie sur U et égale à 1 sur Σ, (cf. Lemme 2.2). On note $T_{\Sigma}\pi' : T_{\Sigma}U \to T\Sigma$ le morphisme de projection de $T_{\Sigma}U$ sur son sous-fibré horizontal $T\Sigma$ associé à π'. On remarque que

$$\frac{da'}{a'}|_{\Sigma} = \frac{1}{h_0} \frac{da}{a}|_{\Sigma},$$

où a est la fonction homogène de degré 1 relativement à T considérée, et que

$$\begin{aligned} T_{\Sigma}\pi' &= Id_{T_{\Sigma}U} - (T' \otimes \frac{da'}{a'})|_{\Sigma} = \\ &= Id_{T_{\Sigma}U} - (X_0 + h_0 T|_{\Sigma}) \otimes \frac{1}{h_0} \frac{da}{a}|_{\Sigma} \overset{(31)}{=} \\ &= T_{\Sigma}\pi - \frac{1}{h_0} X_0 \otimes \frac{da}{a}|_{\Sigma}. \end{aligned}$$

D'après l'interprétation géométrique des champs de tenseurs définissant sur Σ l'opérateur de Nijenhuis induit par le tenseur de Nijenhuis de M présentée par la Proposition 5.2, et les identifications considérées, on a

$$N'_{\Sigma} = T_{\Sigma}\pi' \circ N|_{\Sigma} \circ (T_{\Sigma}\pi')_h^{-1},$$

$$Y'_{\Sigma} = T_{\Sigma}\pi'((NT')|_{\Sigma}),$$

$$\gamma'_{\Sigma} = ({}^t N \frac{da'}{a'})|_{\Sigma} - \langle ({}^t N \frac{da'}{a'})|_{\Sigma}, T|_{\Sigma} \rangle \frac{da}{a}|_{\Sigma},$$

$$g'_{\Sigma} = \langle \frac{da'}{a'}|_{\Sigma}, (NT')|_{\Sigma} \rangle.$$

En tenant compte de l'expression (35) de N, le calcul des formules ci-dessus nous donne, respectivement, les relations (46)-(49).$\diamondsuit$

Proposition 5.4 *Soient (M, Λ_0, N, T) et (M', Λ'_0, N', T') deux variétés de Poisson-Nijenhuis homogènes.*

1. *Le produit $M \times M'$ muni du tenseur de Poisson $\Lambda_0 + \Lambda'_0$, du tenseur de Nijenhuis $N + N'$, et du champ de vecteurs $T + T'$ est une variété de Poisson-Nijenhuis homogène.*

2. *Soit Σ une sous-variété de M de codimension 1 transverse à T, et $((\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma}), \mathcal{N}_\Sigma)$, $\mathcal{N}_\Sigma := (N_\Sigma, Y_\Sigma, \gamma_\Sigma, g_\Sigma)$, la structure de Jacobi-Nijenhuis induite sur Σ par la structure de Poisson-Nijenhuis homogène (Λ_0, N, T) de M, au sens de la Proposition 5.2. Alors, $\Sigma \times M'$ est une sous-variété de $M \times M'$ de codimension 1 transverse à $T + T'$; si $((\Lambda_{0\Sigma\times M'}, E_{0\Sigma\times M'}), \mathcal{N}_{\Sigma\times M'})$, $\mathcal{N}_{\Sigma\times M'} := (N_{\Sigma\times M'}, Y_{\Sigma\times M'}, \gamma_{\Sigma\times M'}, g_{\Sigma\times M'})$, est la structure de Jacobi-Nijenhuis induite sur $\Sigma \times M'$ par la structure de Poisson-Nijenhuis homogène $(\Lambda_0 + \Lambda'_0, N + N', T + T')$ de $M \times M'$, les champs de tenseurs qui la définissent sont donnés, respectivement, par les formules :*

$$\Lambda_{0\Sigma\times M'} = \Lambda_{0\Sigma} + \Lambda'_0 - T' \wedge E_{0\Sigma} \quad \text{et} \quad E_{0\Sigma\times M'} = E_{0\Sigma}, \tag{50}$$

$$N_{\Sigma\times M'} = N_\Sigma + N' - T' \otimes \gamma_\Sigma, \tag{51}$$

$$Y_{\Sigma\times M'} = Y_\Sigma + (N' - g_\Sigma Id_{TM'})T', \tag{52}$$

$$\gamma_{\Sigma\times M'} = \gamma_\Sigma, \tag{53}$$

$$g_{\Sigma\times M'} = g_\Sigma. \tag{54}$$

Démonstration : On va seulement prouver les formules (51)-(54); la partie 1 et le fait que $\Sigma \times M'$ est une sous-variété de $M \times M'$ de codimension 1 transverse à $T + T'$ sont évidents; les formules (50) sont le résultat de la Proposition 2.3.

Soient, respectivement, U et a le voisinage tubulaire de Σ dans M et la fonction définie sur U, égale à 1 sur Σ et homogène de degré 1 relativement à T, que l'on a considérés afin de construire la structure de Jacobi-Nijenhuis $((\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma}), \mathcal{N}_\Sigma)$ induite sur Σ par la structure de Poisson-Nijenhuis homogène (Λ_0, N, T) de M, (cf. Proposition 5.2). Maintenant, on considère la sous-variété $\Sigma \times M'$ de $M \times M'$ et le voisinage tubulaire $U \times M'$ de $\Sigma \times M'$ dans $M \times M'$, et on prolonge la fonction a (initialement définie sur U) sur $U \times M'$, en lui imposant d'être constante sur chaque section de la forme $\{x\} \times M'$, avec $x \in U$. Bien entendu, la fonction a ainsi prolongée est égale à 1 sur $\Sigma \times M'$ et homogène de degré 1 relativement à $T + T'$.

Soit $\pi : U \times M' \to \Sigma \times M'$ la projection parallèlement aux courbes intégrales de $T + T'$. On note $T_{\Sigma\times M'}\pi : T_{\Sigma\times M'}(U \times M') \to T(\Sigma \times M')$ le morphisme de projection du fibré vectoriel $T_{\Sigma\times M'}(U \times M') = T_\Sigma U \oplus TM'$ sur son sous-fibré $T(\Sigma \times M') = T\Sigma \oplus TM'$. On a

$$\begin{aligned} T_{\Sigma\times M'}\pi &= Id_{T_{\Sigma\times M'}(U\times M')} - ((T + T') \otimes \frac{da}{a})|_{\Sigma\times M'} = \\ &= Id_{T_\Sigma U} + Id_{TM'} - (T \otimes \frac{da}{a})|_{\Sigma\times M'} - (T' \otimes \frac{da}{a})|_{\Sigma\times M'}, \end{aligned} \tag{55}$$

et on remarque que la restriction de $T_{\Sigma\times M'}\pi$ au sous-fibré horizontal $T(\Sigma \times M')$ de $T_{\Sigma\times M'}(U \times M')$, notée $(T_{\Sigma\times M'}\pi)_h$, est l'identité. D'après la Proposition 5.2,

$$N_{\Sigma\times M'} = T_{\Sigma\times M'}\pi \circ (N + N')|_{\Sigma\times M'} \circ (T_{\Sigma\times M'}\pi)_h^{-1},$$

$$Y_{\Sigma\times M'} = T_{\Sigma\times M'}\pi\left(((N+N')(T+T'))|_{\Sigma\times M'}\right),$$

$$\gamma_{\Sigma\times M'} = ({}^t(N+N')\frac{da}{a})|_{\Sigma\times M'} - \langle({}^t(N+N')\frac{da}{a})|_{\Sigma\times M'}, (T+T')|_{\Sigma\times M'}\rangle da|_{\Sigma\times M'},$$

$$g_{\Sigma\times M'} = \langle\frac{da}{a}|_{\Sigma\times M'}, ((N+N')(T+T'))|_{\Sigma\times M'}\rangle.$$

En tenant compte de (55), le calcul des formules ci-dessus nous donne, respectivement, les expressions (51)-(54).$\diamondsuit$

Proposition 5.5 *Soit (M, Λ_0, N, T) une variété de Poisson-Nijenhuis homogène. On considère deux sous-variétés Σ et Σ' de M de codimension 1 transverses à T. On suppose qu'il existe une courbe intégrale de T rencontrant Σ en un point p et Σ' en un point p'. On munit Σ (resp. Σ') de la structure de Jacobi-Nijenhuis $((\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma}), \mathcal{N}_\Sigma)$, $\mathcal{N}_\Sigma := (N_\Sigma, Y_\Sigma, \gamma_\Sigma, g_\Sigma)$, (resp. $((\Lambda_{0\Sigma'}, E_{0\Sigma'}), \mathcal{N}_{\Sigma'})$, $\mathcal{N}_{\Sigma'} := (N_{\Sigma'}, Y_{\Sigma'}, \gamma_{\Sigma'}, g_{\Sigma'})$), induite de la structure de Poisson-Nijenhuis homogène (Λ_0, N, T) de M, au sens de la Proposition 5.2. Alors, il existe un difféomorphisme d'un voisinage de p dans Σ sur un voisinage de p' dans Σ' qui applique : i) une structure de Jacobi-Nijenhuis conforme à $((\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma}), \mathcal{N}_\Sigma)$ à $((\Lambda_{0\Sigma'}, E_{0\Sigma'}), \mathcal{N}_{\Sigma'})$, et ii) p à p'.*

Démonstration : Soient $(\Lambda_{1\Sigma}, E_{1\Sigma})$ et $(\Lambda_{1\Sigma'}, E_{1\Sigma'})$ les structures de Jacobi engendrées, respectivement, sur Σ et Σ' par $((\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma}), \mathcal{N}_\Sigma)$ et par $((\Lambda_{0\Sigma'}, E_{0\Sigma'}), \mathcal{N}_{\Sigma'})$. On a que $(\Lambda_{1\Sigma}, E_{1\Sigma})$ est compatible avec $(\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma})$ et que $(\Lambda_{1\Sigma'}, E_{1\Sigma'})$ est compatible avec $(\Lambda_{0\Sigma'}, E_{0\Sigma'})$. Compte tenue de la Remarque 5.3, les structures $(\Lambda_{1\Sigma}, E_{1\Sigma})$ et $(\Lambda_{1\Sigma'}, E_{1\Sigma'})$ peuvent être considérées, respectivement, comme les structures de Jacobi induites sur Σ et Σ' par la structure de Poisson homogène (Λ_1, T), $\Lambda_1^\# = N\Lambda_0^\#$, de M. Alors, d'après la Proposition 3.3, il existe une fonction a sur Σ, ne s'annulant en aucun point, et un difféomorphisme ϕ d'un voisinage de p dans Σ sur un voisinage de p' dans Σ' appliquant :

i) le couple $((\Lambda^a_{0\Sigma}, E^a_{0\Sigma}), (\Lambda^a_{1\Sigma}, E^a_{1\Sigma}))$ de structures de Jacobi compatibles a-conformes à $((\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma}), (\Lambda_{1\Sigma}, E_{1\Sigma}))$ à $((\Lambda_{0\Sigma'}, E_{0\Sigma'}), (\Lambda_{1\Sigma'}, E_{1\Sigma'}))$;

ii) p à p'.

Comme on a vu (cf. Proposition 5.1), $((\Lambda^a_{0\Sigma}, E^a_{0\Sigma}), (\Lambda^a_{1\Sigma}, E^a_{1\Sigma}))$ possède un opérateur de récursion $\mathcal{N}^a_\Sigma := (N^a_\Sigma, Y^a_\Sigma, \gamma^a_\Sigma, g^a_\Sigma)$. On vérifie, sans difficulté, que ϕ applique $\mathcal{N}^a_\Sigma := (N^a_\Sigma, Y^a_\Sigma, \gamma^a_\Sigma, g^a_\Sigma)$ à $\mathcal{N}_{\Sigma'} := (N_{\Sigma'}, Y_{\Sigma'}, \gamma_{\Sigma'}, g_{\Sigma'})$, i.e., en chaque point x du voisinage considéré de p dans Σ,

$$N_{\Sigma'}(\phi(x)) = T_x\phi \circ N^a_\Sigma(x) \circ (T_x\phi)^{-1},$$

$$Y_{\Sigma'}(\phi(x)) = T_x\phi(Y^a_\Sigma(x)),$$

$$\gamma_{\Sigma'}(\phi(x)) = ({}^tT_x\phi)^{-1}(\gamma^a_\Sigma(x)),$$

$$g_{\Sigma'}(\phi(x)) = g^a_\Sigma(x).$$

Donc, ϕ applique la structure de Jacobi-Nijenhuis $((\Lambda^a_{0\Sigma}, E^a_{0\Sigma}), \mathcal{N}^a_\Sigma)$ à $((\Lambda_{0\Sigma'}, E_{0\Sigma'}), \mathcal{N}_{\Sigma'})$.$\diamondsuit$

Proposition 5.6 *À toute variété de Jacobi-Nijenhuis $(M, (\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$, $\mathcal{N} := (N, Y, \gamma, g)$, on peut associer une variété de Poisson-Nijenhuis homogène $(\tilde{M}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$ en posant*

$$\tilde{M} = M \times \mathbf{R},$$

$$\tilde{\Lambda}_0 = e^{-t}(\Lambda_0 + \frac{\partial}{\partial t} \wedge E_0),$$

$$\tilde{N} = N + Y \otimes dt + \frac{\partial}{\partial t} \otimes \gamma + g\frac{\partial}{\partial t} \otimes dt,$$

$$\tilde{T} = \frac{\partial}{\partial t},$$

où t est la coordonnée canonique sur le facteur $\mathbf{R}$.

La structure de Jacobi-Nijenhuis induite sur M, vue comme sous-variété de $\tilde{M}$ de codimension 1 transverse à $\tilde{T}$, par la structure de Poisson-Nijenhuis homogène de $\tilde{M}$, au sens de la Proposition 5.2, est la structure initialement donnée.

Démonstration : Les faits que $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{T})$ munit la variété $\tilde{M}$ d'une structure de Poisson homogène et que $\tilde{N}$ est un tenseur de Nijenhuis sur $\tilde{M}$ sont, respectivement, connus par les Propositions 2.5 et 4.2. Donc, il suffit de vérifier la compatibilité de ces structures; la condition $L_{\tilde{T}}\tilde{N} = 0$ est évidemment vérifiée.

On prouve aisément que

$$\tilde{N}\tilde{\Lambda}_0^{\#} = \tilde{\Lambda}_0^{\#}\,{}^t\tilde{N}$$

si, et seulement si, les relations (25)-(27) sont vraies. Donc,

$$\mathcal{N} \circ (\Lambda_0, E_0)^{\#} = (\Lambda_0, E_0)^{\#} \circ {}^t\mathcal{N} \iff \tilde{N}\tilde{\Lambda}_0^{\#} = \tilde{\Lambda}_0^{\#}\,{}^t\tilde{N}.$$

D'autre part, on prouve que, lorsque (25)-(27) sont satisfaites,

$$(\Lambda_0, E_0)^{\#} \circ \mathcal{C}\left((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N}\right) = 0 \iff \tilde{\Lambda}_0^{\#} \circ C(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}) = 0.$$

Ainsi, de la compatibilité de (Λ_0, E_0) avec $\mathcal{N}$, on déduit celle de $\tilde{\Lambda}_0$ avec $\tilde{N}$.

La démonstration de la deuxième partie de cette proposition ne présente aucune difficulté.$\diamondsuit$

Remarque 5.4 *Si $(M, (\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$ est une variété de Jacobi-Nijenhuis au sens de la définition de [17], i.e. la torsion $\mathcal{T}(\mathcal{N})$ de $\mathcal{N}$ ne s'annule que sur l'image de $(\Lambda_0, E_0)^{\#}$, alors $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{N})$ ne définit sur $\tilde{M}$ qu'une structure de* Poisson-Nijenhuis faible *au sens de [18], i.e. la torsion de Nijenhuis $T(\tilde{N})$ de $\tilde{N}$ n'est pas identiquement nulle sur $\tilde{M}$, mais elle s'annule seulement sur l'image de $\tilde{\Lambda}_0^{\#}$.*

De la Proposition 5.6 et de la Remarque 5.3, nous concluons, comme pour les variétés de Poisson-Nijenhuis, le théorème suivant.

Théorème 5.1 ([17]) *Une structure de Jacobi-Nijenhuis $((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$ définie sur une variété différentiable M de dimension finie, engendre sur M une hiérarchie $((\Lambda_k, E_k), k \in \mathbf{N})$ de structures de Jacobi deux à deux compatibles. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, (Λ_k, E_k) est la structure de Jacobi associée au morphisme de fibrés vectoriels $(\Lambda_k, E_k)^{\#} : T^*M \times \mathbf{R} \to TM \times \mathbf{R}$, $(\Lambda_k, E_k)^{\#} = \mathcal{N}^k \circ (\Lambda_0, E_0)^{\#}$.*

En plus, pour tous $k, l \in \mathbf{N}$, le couple $((\Lambda_k, E_k), \mathcal{N}^l)$ définit sur M une structure de Jacobi-Nijenhuis.

Partie II

Dans la présente partie de notre travail, nous allons établir les modèles locaux de structures de Poisson-Nijenhuis homogènes, (cf. Définition 5.3). Nous reprenons la technique développée dans [26] pour la classification locale de couples de formes symplectiques compatibles, et nous reposons sur les résultats établis dans [21] et [23], par un des auteurs, concernant la construction des formes normales de structures de Poisson-Nijenhuis.

6 Le lieu régulier de N

Soit M une variété différentiable de dimension finie. On note $\mathbf{K}_M[\lambda]$ l'algèbre des polynômes à une variable à coefficients dans l'anneau $\mathcal{A}(M, \mathbf{K})$ des fonctions C^∞-différentiables, si M est une variété réelle, ou des fonctions holomorphes sur M, si M est une variété complexe. Un polynôme P de $\mathbf{K}_M[\lambda]$ sera dit *irréductible* s'il est irréductible en chaque point de M, et deux polynômes P et Q de $\mathbf{K}_M[\lambda]$ seront dits *premiers entre eux* s'ils le sont partout sur M.

Soit N un tenseur de Nijenhuis défini sur M. Il définit une section du fibré vectoriel $Hom(TM, TM) \to M$, où $Hom(TM, TM)$ désigne le fibré des endomorphismes du fibré tangent TM de M.

Définition 6.1 *On dit que le* type algébrique de $N : M \to Hom(TM, TM)$ est constant *sur un voisinage ouvert U d'un point p de M, s'il existe des polynômes irréductibles et premiers entre eux $P_1, \dots, P_r$ de $\mathbf{K}_U[\lambda]$ et des entiers positifs n_{ij}, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, s_i$, tels que la famille des polynômes $(P_i^{n_{ij}}$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, s_i)$ soit, en chaque $x \in U$, la famille des diviseurs élémentaires de l'endomorphisme $N(x) : T_xM \to T_xM$.*

D'un point de vue géométrique, le type algébrique de $N : M \to Hom(TM, TM)$ est constant sur U lorsque, en chaque $x \in U$, l'espace T_xU se décompose en sous-espaces $N(x) - cycliques$ isomorphes aux sous-espaces $N(p) - cycliques$ en lesquels se décompose l'espace T_pU.

Définition 6.2 *On dit que $N : M \to Hom(TM, TM)$ est* 0-déformable *sur U, si la famille $(P_i^{n_{ij}})$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, s_i$, de ses diviseurs élémentaires est indépendante du point x de U.*

Bien entendu, dans le cas où N est 0–déformable sur U, son type algébrique est constant sur U.

L'ensemble des points de M qui possèdent un voisinage ouvert sur lequel le type algébrique de N est constant, est un ouvert dense de M, (cf. [21]).

Définition 6.3 (Conditions de régularité) *Un point p de M est dit* régulier relativement à N *lorsqu'il possède un voisinage ouvert U dans M tel que :*

1. *le type algébrique de N soit constant sur U;*
2. *les sous-espaces*

$$\mathcal{E}_x = \bigcap_{i=1}^{s} kerdf_i(x)$$

de T_xU, $x \in U$, où $f_1, \ldots, f_s$ désignent les coefficients fonctionnels des facteurs irréductibles du polynôme caractéristique $\mathcal{P}_N$ de N, définissent une distribution $\mathcal{E}$ de rang constant sur U;

3. *le type algébrique de la restriction de N à $\mathcal{E}$ soit constant sur U.*

Définition 6.4 *On appelle* lieu régulier *de N, et on note $\mathcal{R}_N$, l'ensemble des points réguliers de M relativement à N.*

L'ensemble $\mathcal{R}_N$ est un ouvert dense de M, (cf. [21]).

7 Décomposition des variétés de Poisson-Nijenhuis symplectiques homogènes

Soit (M, Λ_0, N, T) une variété de Poisson-Nijenhuis symplectique homogène, i.e. Λ_0 est non-dégénéré, fait qui impose que M soit de dimension paire, $L_T\Lambda_0 = -\Lambda_0$ et $L_TN = 0$, et p un point de M possédant un voisinage ouvert U dans M sur lequel le type algébrique de N est constant. Notons $\mathcal{P}_N$ le polynôme caractéristique de N et supposons qu'il s'écrive sur U comme produit $\mathcal{P}_N = \mathcal{P}_1 \cdot \mathcal{P}_2$ de deux polynômes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ premiers entre eux dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1. Posons $N_1 = \mathcal{P}_1(N)$ et $N_2 = \mathcal{P}_2(N)$. Alors, $TU = kerN_1 \oplus kerN_2$, ou bien $TU = ImN_2 \oplus ImN_1$, puisque $kerN_1 = ImN_2$ et $kerN_2 = ImN_1$. Les $N_i : ImN_i \to ImN_i$, $i = 1, 2$, sont des champs d'isomorphismes. Aussi, $T^*U = Im^tN_2 \oplus Im^tN_1$, où ${}^tN_i$ désigne le transposé de N_i, et ${}^tN_i = \mathcal{P}_i({}^tN)$, $i = 1, 2$.

Lemme 7.1 *Les sous-fibrés ImN_i, $i = 1, 2$, sont involutifs.*

Démonstration : Soient X et Y deux sections de ImN_1. Puisque $N_1 : ImN_1 \to ImN_1$ est un isomorphisme, $X = N_1V$ et $Y = N_1W$, où V et W sont aussi deux sections de ImN_1. Alors, $[X, Y] = [N_1V, N_1W] = T(N_1)(V, W) + N_1[N_1V, W] + N_1[V, N_1W] - N_1^2[V, W]$. Mais, $T(N_1)(V, W) = \sum_{r=0}^{m} (\alpha_r(V)N^rW - \alpha_r(W)N^rV)$, où α_r, $r = 1, \ldots, m$, sont 1-formes, d'où il vient que $T(N_1)(V, W)$ est une section de ImN_1, car V et W sont des sections de ImN_1. Par suite $[X, Y]$ est une section de ImN_1, d'où l'involutivité de ImN_1.

De même manière on prouve l'involutivité de ImN_2.$\diamondsuit$

Alors, les ImN_1 et ImN_2 définissent deux feuilletages supplémentaires de U. En conséquence, sur un voisinage convenable de p, M s'identifie à un produit $M' \times M''$ de deux variétés; M' s'identifiant à l'ensemble des feuilles de ImN_1 et M'' à celui de ImN_2. Donc, $TM' = ImN_2 = kerN_1$ et $TM'' = ImN_1 = kerN_2$.

Lemme 7.2 *Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\Lambda_k(Im^tN_2, Im^tN_1) = 0$, où Λ_k est le tenseur de Poisson associé au morphisme de fibrés vectoriels $\Lambda_k^\# : T^*M \to TM$, $\Lambda_k^\# = N^k\Lambda_0^\#$.*

Démonstration : Pour toutes α, β 1-formes sur U,

$$\Lambda_k({}^tN_2\alpha, {}^tN_1\beta) = \Lambda_k(\mathcal{P}_2({}^tN)\alpha, \mathcal{P}_1({}^tN)\beta) = \Lambda_k(\mathcal{P}_1({}^tN)\mathcal{P}_2({}^tN)\alpha, \beta) = \Lambda_k(\mathcal{P}_N({}^tN)\alpha, \beta) = 0,$$

comme $\mathcal{P}_N$ est un polynôme annulateur de ${}^tN$.$\diamondsuit$

Proposition 7.1 *Les hypothèses et les notations étant les mêmes que ci-dessus, au voisinage de p, la variété de Poisson-Nijenhuis symplectique homogène (M, Λ_0, N, T) s'identifie au produit $(M', \Lambda'_0, N', T') \times (M'', \Lambda''_0, N'', T'')$ de variétés de Poisson-Nijenhuis symplectiques homogènes.*

Démonstration : Du Lemme 7.2 résulte que, dans un système de coordonnées produit (x, y) de $M' \times M''$, les Λ_k, $k \in \mathbf{N}$, reçoivent une expression locale du type

$$\Lambda_k = \sum_{1 \leq i < j \leq n_1} f_{kij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{1 \leq l < m \leq n_2} g_{klm} \frac{\partial}{\partial y_l} \wedge \frac{\partial}{\partial y_m},$$

où $n_1 = dim M'$ et $n_2 = dim M''$. Puisque les Λ_k, $k \in \mathbf{N}$, sont de Poisson deux à deux compatibles, leurs crochets de Poisson associés $\{\ ,\ \}_k$, $k \in \mathbf{N}$, vérifient l'identité de Jacobi et l'identité de Jacobi généralisée. En appliquant ces identités pour les fonctions coordonnées, on prouve que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, les fonctions f_{kij}, $1 \leq i < j \leq n_1$, ne dépendent que des coordonnées x, et que les fonctions g_{klm}, $1 \leq l < m \leq n_2$, ne dépendent que des coordonnées y, (cf. [21]).

Posons, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\Lambda'_k = \sum_{1 \leq i < j \leq n_1} f_{kij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{et} \quad \Lambda''_k = \sum_{1 \leq l < m \leq n_2} g_{klm} \frac{\partial}{\partial y_l} \wedge \frac{\partial}{\partial y_m}.$$

Les Λ'_k (resp. Λ''_k), $k \in \mathbf{N}$, définissent sur M' (resp. M'') une hiérarchie de tenseurs de Poisson deux à deux compatibles, avec Λ'_0 (resp. Λ''_0) non-dégénéré sur M' (resp. M''), dont l'opérateur de récursion N' (resp. N'') est la projection de $N\,|_{ImN_2}$ (resp. $N\,|_{ImN_1}$) sur ImN_2 (resp. ImN_1) et son polynôme caractéristique est le polynôme $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{P}_2$).

D'après cette décomposition, le champ d'homothéties T s'écrit sous la forme

$$T = T' + T'',$$

où T' (resp. T'') est un champ de vecteurs tangent à M' (resp. M''), i.e., dans les coordonnées produit (x, y) de $M = M' \times M''$,

$$T' = \sum_{i=1}^{n_1} a_i(x, y) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad T'' = \sum_{l=1}^{n_2} b_l(x, y) \frac{\partial}{\partial y_l}.$$

Donc, $L_T \Lambda_0 = -\Lambda_0$ si, et seulement si,

$$L_{T'} \Lambda'_0 = [T', \Lambda'_0] = -\Lambda'_0, \tag{56}$$

$$L_{T''} \Lambda''_0 = [T'', \Lambda''_0] = -\Lambda''_0, \tag{57}$$

$$L_{T'} \Lambda''_0 + L_{T''} \Lambda'_0 = [T', \Lambda''_0] + [T'', \Lambda'_0] = 0, \tag{58}$$

et $L_T \Lambda_1 = -\Lambda_1$ (cf. Remarque 5.2) si, et seulement si,

$$L_{T'} \Lambda'_1 = [T', \Lambda'_1] = -\Lambda'_1, \tag{59}$$

$$L_{T''} \Lambda''_1 = [T'', \Lambda''_1] = -\Lambda''_1, \tag{60}$$

$$L_{T'} \Lambda''_1 + L_{T''} \Lambda'_1 = [T', \Lambda''_1] + [T'', \Lambda'_1] = 0. \tag{61}$$

Comme Λ'_0 et Λ''_0 sont, respectivement, non-dégénérés sur M' et M'', en tenant compte des relations (56), (57), (59), (60), et du fait que $\Lambda'_1 = N'\Lambda'_0$ et $\Lambda''_1 = N''\Lambda''_0$, nous concluons que

$$L_{T'}N' = 0 \quad \text{et} \quad L_{T''}N'' = 0. \tag{62}$$

Par suite, $L_T N = 0$ si, et seulement si,

$$L_{T'}N'' + L_{T''}N' = 0. \tag{63}$$

Mais, les expressions locales de $L_{T'}N''$ et de $L_{T''}N'$ ne contiennent, respectivement, que de termes de type $\frac{\partial}{\partial x} \otimes dy$ et de type $\frac{\partial}{\partial y} \otimes dx$. Alors, (63) est vérifiée si, et seulement si,

$$L_{T'}N'' = 0 \quad \text{et} \quad L_{T''}N' = 0. \tag{64}$$

En conséquence, les relations (61), (64) et (58) nous donnent

$$\begin{aligned} L_{T'}\Lambda''_1 + L_{T''}\Lambda'_1 &= L_{T'}N'' \cdot \Lambda''_0 + N'' \cdot L_{T'}\Lambda''_0 + L_{T''}N' \cdot \Lambda'_0 + N' \cdot L_{T''}\Lambda'_0 = \\ &= N'' \cdot L_{T'}\Lambda''_0 + N' \cdot L_{T''}\Lambda'_0 = \\ &= N'' \cdot L_{T'}\Lambda''_0 - N' \cdot L_{T'}\Lambda''_0 = \\ &= (N'' - N') \cdot L_{T'}\Lambda''_0 = 0, \end{aligned}$$

d'où il résulte que, en dehors des lieux singuliers de N' et de N'',

$$L_{T'}\Lambda''_0 = 0, \tag{65}$$

et, à cause de (58),

$$L_{T''}\Lambda'_0 = 0. \tag{66}$$

Après un calcul élémentaire on trouve que, dans les coordonnées (x, y), les équations (65) et (66) ont, respectivement, les expressions matricielles

$$\Lambda''_0 \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial a_{n_1}}{\partial y_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_1}{\partial y_{n_2}} & \cdots & \frac{\partial a_{n_1}}{\partial y_{n_2}} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \Lambda'_0 \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial b_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial b_{n_2}}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial b_1}{\partial x_{n_1}} & \cdots & \frac{\partial b_{n_2}}{\partial x_{n_1}} \end{pmatrix} = 0,$$

d'où nous concluons que, en dehors des lieux singuliers de N' et de N'', comme Λ''_0 et Λ'_0 sont non-dégénérés, respectivement, sur M'' et M', les fonctions coefficients a_i, $i = 1, \ldots, n_1$, de T' ne dépendent que des coordonnées x et que les fonctions coefficients b_l, $l = 1, \ldots, n_2$, de T'' ne dépendent que des coordonnées y. À cause de la continuité des fonctions a_i, $i = 1, \ldots, n_1$, et b_l, $l = 1, \ldots, n_2$, sur M, le résultat ci-dessus est vrai sur tout un voisinage de p.

Bien entendu, des relations (56) (resp. (57)) et (62), il découle que T' (resp. T'') est un champ d'homothéties de (Λ'_0, N') (resp. (Λ''_0, N'')).$\diamondsuit$

8 Modèles locaux des structures de Poisson-Nijenhuis symplectiques homogènes

Soit (Λ_0, N, T) une structure de Poisson-Nijenhuis symplectique homogène définie sur une variété différentiable M de dimension $2n$. Des résultats du paragraphe précédent, il vient que le problème de construction d'un modèle local de (Λ_0, N, T) se ramène à la recherche de la forme normale de ces champs de tenseurs dans le cas particulier où $\mathcal{P}_N$ est une puissance d'un polynôme irréductible. Les cas possibles sont :

1. $\mathcal{P}_N(\lambda) = (\lambda + f)^{2n}$;

2. $\mathcal{P}_N(\lambda) = (\lambda^2 + g\lambda + h)^n$, (cas qui apparaît lorsque M est une variété réelle).

En se plaçant sur un voisinage d'un point $p \in \mathcal{R}_N$ et en étudiant séparément les deux cas distingués, nous établissons dans [21] les théorèmes suivants.

Théorème 8.1 *Soit (Λ_0, N) une structure de Poisson-Nijenhuis symplectique définie sur une variété différentiable M (réelle ou complexe) de dimension $2n$, et p un point régulier de M relativement à N. Si le polynôme caractéristique de N est du type $\mathcal{P}_N(\lambda) = (\lambda + f)^{2n}$ et $df(p) \neq 0$, alors il existe sur un voisinage U de p un système de coordonnées locales $((x_j^i),\, y_1,\, y_2)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, 2r_i$, $r_1 \geq \ldots \geq r_m$, de M, où $y_2 = f - a$, $a = f(p)$, centré en p, dans lequel le couple (Λ_0, N) a l'expression :*

$$\Lambda_0 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{r_i} \frac{\partial}{\partial x_{2k-1}^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_{2k}^i} \right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \wedge \frac{\partial}{\partial y_2}, \tag{67}$$

$$N = -(y_2 + a)Id + H + \frac{\partial}{\partial y_1} \otimes \alpha - Z \otimes dy_2, \tag{68}$$

où

$$H = \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{k=1}^{r_i - 1} \left(\frac{\partial}{\partial x_{2k-1}^i} \otimes dx_{2k+1}^i + \frac{\partial}{\partial x_{2k+2}^i} \otimes dx_{2k}^i \right) \right], \tag{69}$$

$$\alpha = dx_2^1 + \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{r_i} \left[(k - \frac{1}{2}) x_{2k}^i dx_{2k-1}^i + (k + \frac{1}{2}) x_{2k-1}^i dx_{2k}^i \right] \right), \tag{70}$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial x_1^1} + \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{r_i} \left[(k + \frac{1}{2}) x_{2k-1}^i \frac{\partial}{\partial x_{2k-1}^i} - (k - \frac{1}{2}) x_{2k}^i \frac{\partial}{\partial x_{2k}^i} \right] \right). \tag{71}$$

Si $df(p) = 0$, les expressions ci-dessus ne contiennent pas les coordonnées y_1 et y_2.

Idée de la démonstration : Après la détermination de la forme canonique d'un bivecteur non-dégénéré défini sur un espace vectoriel V de dimension $2n$ et d'un endomorphisme de V, ainsi que celle d'une structure de Poisson-Nijenhuis symplectique dépendant d'un paramètre dont l'opérateur de récursion est nilpotent et 0-déformable, par rapport au paramètre aussi, effectuée dans [21], nous construisons le modèle de (Λ_0, N) en suivant les pas suivants.

Si $df(p) = 0$, puisque $p \in \mathcal{R}_N$, f est constante sur U et le couple $(\Lambda_0, N + fId)$ définit sur U une structure de Poisson-Nijenhuis symplectique dont l'opérateur de récursion est 0-déformable et nilpotent. Alors, son modèle est bien connu par les précédents et à partir de celui-ci nous déduisons, facilement, la forme normale de (Λ_0, N).

Si $df(p) \neq 0$, nous considérons le couple de champs de tenseurs $(\Lambda_0, N + fId)$ qui induit sur les variétés intégrales du fibré quotient $ker\, df / X_f$, où $X_f = \Lambda_0^{\#}(df)$, une structure de Poisson-Nijenhuis symplectique, dépendant paramétriquement de f, dont l'opérateur de récursion est nilpotent et 0-déformable, par rapport au paramètre aussi. Pour toute valeur du paramètre f, le modèle de la structure induite est connu par l'étude précédente. À partir de ce modèle nous établissons la forme normale de (Λ_0, N) présentée par le Théorème 8.1. Dans l'écriture de cette forme, m désigne le nombre des sous-espaces $(N + fId)(x)$-invariants en lesquels se décompose l'espace quotient $ker\, df(x)/X_f(x)$, $x \in U$; le i-ème sous-espace, $i = 1, \ldots, m$, se décompose en deux sous-espaces $(N + fId)(x)$-cycliques, tous deux de dimension r_i; $y_2 = f - a$, $a = f(p)$, et y_1 est choisi de manière que $\frac{\partial}{\partial y_1} = X_f$.

Les modèles sont complètement déterminés par le type algébrique de N.$\diamondsuit$

Lorsque $\mathcal{P}_N(\lambda) = (\lambda + f)^{2n}$ et $df(p) \neq 0$, on trouve que, dans les coordonnées du Théorème 8.1,

$$\Lambda_1 = -(y_2 + a)\Lambda_0 + \Pi + Z \wedge \frac{\partial}{\partial y_1}, \tag{72}$$

où

$$\Pi = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{r_i - 1} \frac{\partial}{\partial x^i_{2k-1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^i_{2k+2}} \right), \tag{73}$$

et qu'un représentant du champ d'homothéties T de (Λ_0, N) est le champ de vecteurs

$$\mathbf{T} = \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x^1_1} + \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{r_i} x^i_{2k-1} \frac{\partial}{\partial x^i_{2k-1}} \right) + y_1 \frac{\partial}{\partial y_1}; \tag{74}$$

il constitue un modèle de T, à addition près d'un automorphisme de Poisson infinitésimal X de Λ_0 tel que, $L_X N = 0$. On remarque que, si $df(p) = 0$, les expressions (72) et (74) ne contiennent pas les coordonnées y_1 et y_2.

Dans le cas où $\mathcal{P}_N(\lambda) = (\lambda^2 + g\lambda + h)^n$, avec $g^2 - 4h$ strictement negative sur un voisinage U de p, la construction des modèles est reposée sur : i) L'existence, sur un voisinage de p, d'une structure complexe J, i.e. $J^2 = -Id$ et sa torsion de Nijenhuis est identiquement nulle. J est la partie semi-simple de l'opérateur $N_0 = 2(4h - g^2)^{-1/2}N + g(4h - g^2)^{-1/2}Id$, donc il existe un polynôme $Q \in \mathbf{K}_U[\lambda]$ à coefficients constants, car N_0 est 0-déformable, tel que $J = Q(N_0)$, i.e. J est un opérateur polynomial de N à coefficients des fonctions de g et de h, (cf. [24]). ii) Le lemme suivant.

Lemme 8.1 ([21]) *Les notations et les hypothèses étant les mêmes que ci-dessus, soit $\bar{\Lambda}_0$ (resp. $\bar{\Lambda}_1$) le champ de tenseurs associé au morphisme de fibrés vectoriels $\bar{\Lambda}_0^{\#} = J\Lambda_0^{\#}$ (resp. $\bar{\Lambda}_1^{\#} = J\Lambda_1^{\#}$). Alors, $\bar{\Lambda}_0$ (resp. $\bar{\Lambda}_1$) est de Poisson compatible avec Λ_0 (resp. Λ_1), et $\hat{\Lambda}_0 = \Lambda_0 - i\bar{\Lambda}_0$ (resp. $\hat{\Lambda}_1 = \Lambda_1 - i\bar{\Lambda}_1$) est un tenseur de Poisson complexe holomorphe.*

En plus, $(\hat{\Lambda}_0, \hat{\Lambda}_1)$ constitue un couple de tenseurs de Poisson complexes holomorphes compatibles.

On remarque que l'opérateur de récursion de $(\hat{\Lambda}_0, \hat{\Lambda}_1)$ est aussi l'opérateur N, qui est holomorphe, dont le lieu régulier coïncide avec celui de N, vu comme opérateur réel, et dont le polynôme caractéristique est $\hat{\mathcal{P}}_N(\lambda) = (\lambda + f)^n$, où $f = 1/2[g - i(4h - g^2)^{1/2}]$ est une fonction holomorphe. Il existe donc une carte locale complexe $\Big(U,\, (z^j_l),\, w_1,\, w_2\Big)$, $j = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots, 2r_j$, $r_1 \geq \ldots \geq r_m$, centrée en p, sur laquelle $\hat{\Lambda}_0$ et $\hat{\Lambda}_1$ ont, respectivement, les expressions (67) et (72). Si $\Big(U,\, (x^j_l),\, u_1,\, u_2; (y^j_l),\, v_1,\, v_2\Big)$, $j = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots, 2r_j$, $r_1 \geq \ldots \geq r_m$, est la carte réelle associée à celle-ci la complexe, après les remplacements adéquats dans les expressions reçues de $\hat{\Lambda}_0$ et de $\hat{\Lambda}_1$, on considère leurs parties réelles. Ainsi, on obtient une forme normale de (Λ_0, Λ_1) et, par conséquent, de N. Elles sont présentées par le théorème suivant.

Théorème 8.2 *Soit (Λ_0, N) une structure de Poisson-Nijenhuis symplectique définie sur une variété différentiable réelle M de dimension $2n$, et p un point régulier de M relativement à N. Si le polynôme caractéristique de N est du type $\mathcal{P}_N(\lambda) = (\lambda^2 + g\lambda + h)^n$,* *avec g^2-4h strictement negative sur un voisinage de p, alors il existe un système de coordonnées locales $\Big((x_l^j),\, u_1,\, u_2;\, (y_l^j),\, v_1,\, v_2\Big)$, $j=1,\ldots,m$, $l=1,\ldots,2r_j$, $r_1\geq\ldots\geq r_m$, de M, centré en p, dans lequel les champs de tenseurs Λ_0 et N ont, respectivement, les expressions :*

$$\Lambda_0=\sum_{j=1}^m\left[\sum_{k=1}^{r_j}\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2k-1}^j}\wedge\frac{\partial}{\partial x_{2k}^j}\;-\;\frac{\partial}{\partial y_{2k-1}^j}\wedge\frac{\partial}{\partial y_{2k}^j}\right)\right]\;+\;\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\wedge\frac{\partial}{\partial u_2}\;-\;\frac{\partial}{\partial v_1}\wedge\frac{\partial}{\partial v_2}\right),\tag{75}$$

$$\begin{aligned}N\;&=\;-(u_2+a)Id-(v_2+b)J+H_x+H_y+\frac{\partial}{\partial u_1}\otimes(\alpha_x-\alpha_y)+\\&+\;\frac{\partial}{\partial v_1}\otimes(\alpha_x+\alpha_y)-Z_x\otimes(du_2+dv_2)-Z_y\otimes(du_2-dv_2),\end{aligned}\tag{76}$$

où $a=Re\hat{a}$, $b=Im\hat{a}$, $(\hat{a}=f(p))$,

$$J=\sum_{j,l}\left(\frac{\partial}{\partial y_l^j}\otimes dx_l^j\;-\;\frac{\partial}{\partial x_l^j}\otimes dy_l^j\right)\;-\;\frac{\partial}{\partial u_1}\otimes dv_1\;-\;\frac{\partial}{\partial u_2}\otimes dv_2\;+\;\frac{\partial}{\partial v_1}\otimes du_1\;+\;\frac{\partial}{\partial v_2}\otimes du_2,$$

$$H_x=\sum_{j=1}^m\left[\sum_{k=1}^{r_j-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_{2k-1}^j}\otimes dx_{2k+1}^j\;+\;\frac{\partial}{\partial x_{2k+2}^j}\otimes dx_{2k}^j\right)\right],$$

$$H_y=\sum_{j=1}^m\left[\sum_{k=1}^{r_j-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_{2k-1}^j}\otimes dy_{2k+1}^j\;+\;\frac{\partial}{\partial y_{2k+2}^j}\otimes dy_{2k}^j\right)\right],$$

$$\alpha_x=dx_2^1\;+\;\sum_{j=1}^m\left(\sum_{k=1}^{r_j}\left[(k-\frac{1}{2})x_{2k}^j dx_{2k-1}^j\;+\;(k+\frac{1}{2})x_{2k-1}^j dx_{2k}^j\right]\right),$$

$$\alpha_y=\sum_{j=1}^m\left(\sum_{k=1}^{r_j}\left[(k-\frac{1}{2})y_{2k}^j dy_{2k-1}^j\;+\;(k+\frac{1}{2})y_{2k-1}^j dy_{2k}^j\right]\right),$$

$$Z_x=\frac{\partial}{\partial x_1^1}\;+\;\sum_{j=1}^m\left(\sum_{k=1}^{r_j}\left[(k+\frac{1}{2})x_{2k-1}^j\frac{\partial}{\partial x_{2k-1}^j}\;-\;(k-\frac{1}{2})x_{2k}^j\frac{\partial}{\partial x_{2k}^j}\right]\right),$$

$$Z_y=\sum_{j=1}^m\left(\sum_{k=1}^{r_j}\left[(k+\frac{1}{2})y_{2k-1}^j\frac{\partial}{\partial y_{2k-1}^j}\;-\;(k-\frac{1}{2})y_{2k}^j\frac{\partial}{\partial y_{2k}^j}\right]\right).$$

Lemme 8.2 *Les hypothèses et les notations étant les mêmes que dans les précédents, un champ de vecteurs T est un champ d'homothéties de (Λ_0,Λ_1) si, et seulement si, le champ de vecteurs holomorphe $\hat{T}=\frac{1}{2}(T-iJT)$ est un champ d'homothéties de $(\hat{\Lambda}_0,\hat{\Lambda}_1)$.*

Démonstration : J étant l'opérateur de récursion des couples $(\Lambda_0,\bar{\Lambda}_0)$ et $(\Lambda_1,\bar{\Lambda}_1)$ de tenseurs de Poisson compatibles (cf. Lemme 8.1), sa torsion de Nijenhuis est identiquement nulle sur M, i.e.

$$L_{JX}J-JL_XJ=0,\qquad X\in\mathcal{V}^1(M),\tag{77}$$

et il vérifie la relation de compatibilité

$$L_{JX}\Lambda_j=J\cdot L_X\Lambda_j-L_XJ\cdot\Lambda_j,\tag{78}$$

$(j=0,1)$, pour tout champ de vecteurs X sur M. Ainsi, pour $j=0,1$, on a

$$\begin{aligned}
[\hat{T},\hat{\Lambda}_j] &= [\frac{1}{2}(T-iJT),\Lambda_j-iJ\Lambda_j]= \\
&= \frac{1}{2}\left([T,\Lambda_j]-i[T,J\Lambda_j]-i[JT,\Lambda_j]-[JT,J\Lambda_j]\right)= \\
&= \frac{1}{2}\left(L_T\Lambda_j-iL_TJ\cdot\Lambda_j-iJ\cdot L_T\Lambda_j-iJ\cdot L_T\Lambda_j+\right. \\
&+ \left. iL_TJ\cdot\Lambda_j-JL_TJ\cdot\Lambda_j-J^2L_T\Lambda_j+JL_TJ\cdot\Lambda_j\right)= \\
&= L_T\Lambda_j-iJ\cdot L_T\Lambda_j.
\end{aligned}$$

Donc, pour $j=0,1$, $[\hat{T},\hat{\Lambda}_j]=-\hat{\Lambda}_j$ si, et seulement si, $L_T\Lambda_j=[T,\Lambda_j]=-\Lambda_j$.$\diamondsuit$

Alors, dans le cas où $\mathcal{P}_N(\lambda)=(\lambda^2+g\lambda+h)^n$, T est la partie réelle d'un champ d'homothéties holomorphe $\hat{T}$ de $(\hat{\Lambda}_0,\hat{\Lambda}_1)$. Un représentant de $\hat{T}$ est le champ de vecteurs holomorphe $\hat{\mathbf{T}}$ qui, dans les coordonnées complexes considérées $\left((z_l^j),w_1,w_2\right)$, $j=1,\ldots,m$, $l=1,\ldots,2r_j$, $r_1\geq\ldots\geq r_m$, a l'expression (74). Par suite, un modèle de T est le champ de vecteurs $\mathbf{T}=Re(2\hat{\mathbf{T}})$ qui, dans les coordonnées réelles $\left((x_l^j),\,u_1,\,u_2;\,(y_l^j),\,v_1,\,v_2\right)$, $j=1,\ldots,m$, $l=1,\ldots,2r_j$, $r_1\geq\ldots\geq r_m$, associées à celles-ci les complexes, a l'écriture

$$\mathbf{T}=\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_1^1}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r_j}\left(x_{2k-1}^j\frac{\partial}{\partial x_{2k-1}^j}+y_{2k-1}^j\frac{\partial}{\partial y_{2k-1}^j}\right)+u_1\frac{\partial}{\partial u_1}+v_1\frac{\partial}{\partial v_1}, \tag{79}$$

à addition près d'un biautomorphisme de Poisson infinitésimal de (Λ_0,Λ_1), $\Lambda_1^{\#}=N\Lambda_0^{\#}$.

De l'étude effectuée, nous concluons le théorème suivant.

Théorème 8.3 *Soit (Λ_0,N,T) une structure de Poisson-Nijenhuis symplectique homogène définie sur une variété différentiable M de dimension $2n$. Alors, au voisinage de chaque point régulier p de M relativement à N, le modèle de (M,Λ_0,N,T) est un produit fini de variétés de Poisson-Nijenhuis symplectiques homogènes dont l'opérateur de récursion a comme polynôme caractéristique une puissance d'un polynôme irréductible.*

Si M est une variété complexe, le modèle de la structure de Poisson-Nijenhuis de chaque facteur de ce produit est donné par le Théorème 8.1, et celui du champ d'homothéties correspondant par la formule (74), à addition près d'un biautomorphisme de Poisson infinitésimal de la structure de Poisson-Nijenhuis du facteur.

Si M est une variété réelle, le modèle de la structure de Poisson-Nijenhuis de chaque facteur de ce produit est présenté par le Théorème 8.1 ou 8.2, selon le type du polynôme caractéristique de l'opérateur de récursion du facteur, et celui du champ d'homothéties correspondant est, respectivement, présenté par la formule (74) ou (79), à addition près d'un biautomorphisme de Poisson infinitésimal de la structure de Poisson-Nijenhuis du facteur.

Les modèles sont complètement déterminés par la famille des diviseurs élémentaires de N. (On note que chaque diviseur élémentaire apparaît un nombre paire de fois dans cette famille.)

9 Modèles locaux de structures de Poisson-Nijenhuis homogènes en dimension impaire

Soit (Λ_0, N, T) une structure de Poisson-Nijenhuis homogène définie sur une variété différentiable M de dimension $2n+1$, avec Λ_0 de rang maximum sur un ouvert dense de M. D'après les résultats sur : i) les modèles locaux de structures de Poisson-Nijenhuis symplectiques (cf. §8 et [21]), ii) la symplectisation d'une structure de Poisson-Nijenhuis (cf. [22]), et iii) la réduction d'une structure de Poisson-Nijenhuis (cf. [28], [18]), en se plaçant sur un voisinage d'un point générique p de M, i.e. $p \in \mathcal{R}_N$ et $corang\,\Lambda_0(p) = 1$, nous établissons dans [23] le théorème suivant.

Théorème 9.1 *Les hypothèses et les notations étant les mêmes que ci-dessus, alors, au voisinage de chaque point générique p de M, le modèle de (M, Λ_0, N) est un produit d'une variété de Poisson-Nijenhuis (M', Λ'_0, N') de dimension impaire $2l-1$, $l \leq n+1$, dont le tenseur de Nijenhuis N' a comme polynôme caractéristique un polynôme de type $\mathcal{P}_{N'}(\lambda) = (\lambda + f)^{2l-1}$, et d'une variété de Poisson-Nijenhuis symplectique (M'', Λ''_0, N'').*

Si p' est la projection de p sur M' et $df(p') \neq 0$, il existe sur un voisinage de p' dans M' un système de coordonnées locales $\big((x'^i_j), y'\big)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, 2r_i$, $r_1 \geq \ldots \geq r_m$, $y' = f - a'$, $a' = f(p')$, de M', centré en p', dans lequel

$$\Lambda'_0 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{r_i} \frac{\partial}{\partial x'^i_{2k-1}} \wedge \frac{\partial}{\partial x'^i_{2k}} \right), \tag{80}$$

$$N' = -(y' + a')Id + H' - Z' \otimes dy', \tag{81}$$

où H' et Z' ont, respectivement, dans les coordonnées considérées, les écritures (69) et (71). Si $df(p') = 0$, les expressions (80) et (81) ne contiennent pas les coordonnées $x'^m_{2r_m}$ et y'.

Si p'' est la projection de p sur M'', l'expression locale des champs de tenseurs Λ''_0 et N'', sur un voisinage de p'' dans M'', est donnée par le Théorème 8.3.

Le modèle de (M, Λ_0, N) est complètement déterminé par la famille des diviseurs élémentaires de N.

(Dans les formules (80) et (81), le m et les r_i, $i = 1, \ldots, m$, ont la même signification que celle dans le Théorème 8.1.)

Soit (x''_k), $k = 1, \ldots, dimM''$, un système de coordonnées locales de M'', centré en p'', dans lequel (Λ''_0, N'') a l'expression du modèle, (cf. Théorème 8.3). À cause de l'identification $(M, \Lambda_0, N) = (M', \Lambda'_0, N') \times (M'', \Lambda''_0, N'')$ sur un voisinage U de p, dans le système de coordonnées produit $((x'^i_j), y'; x''_k)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, 2r_i$, $r_1 \geq \ldots \geq r_m$, $k = 1, \ldots, dimM''$, de $M = M' \times M''$, le champ d'homothéties T s'écrit

$$T = T' + T'',$$

où

$$T' = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{2r_i} a^i_j(x', y'; x'') \frac{\partial}{\partial x'^i_j} + b(x', y'; x'') \frac{\partial}{\partial y'}$$

est un champ de vecteurs tangent à M' et

$$T'' = \sum_{k=1}^{dim M''} c_k(x', y'; x'') \frac{\partial}{\partial x''_k}$$

est un champ de vecteurs tangent à M''. (Λ_0, N, T) étant une structure de Poisson-Nijenhuis homogène, T vérifie les relations $L_T\Lambda_0 = -\Lambda_0$, $L_T N = 0$ et $L_T\Lambda_1 = -\Lambda_1$, $\Lambda_1^\# = N\Lambda_0^\#$. Comme, pour $i = 0, 1$, $\Lambda_i = \Lambda'_i + \Lambda''_i$, on a $L_T\Lambda_0 = -\Lambda_0$ si, et seulement si,

$$L_{T'}\Lambda'_0 = [T', \Lambda'_0] = -\Lambda'_0, \tag{82}$$

$$L_{T''}\Lambda''_0 = [T'', \Lambda''_0] = -\Lambda''_0, \tag{83}$$

$$L_{T'}\Lambda''_0 + L_{T''}\Lambda'_0 = [T', \Lambda''_0] + [T'', \Lambda'_0] = 0, \tag{84}$$

et $L_T\Lambda_1 = -\Lambda_1$ si, et seulement si,

$$L_{T'}\Lambda'_1 = [T', \Lambda'_1] = -\Lambda'_1, \tag{85}$$

$$L_{T''}\Lambda''_1 = [T'', \Lambda''_1] = -\Lambda''_1, \tag{86}$$

$$L_{T'}\Lambda''_1 + L_{T''}\Lambda'_1 = [T', \Lambda''_1] + [T'', \Lambda'_1] = 0. \tag{87}$$

Λ''_0 étant inversible sur M'', des relations (83) et (86) il découle que

$$L_{T''}N'' = 0. \tag{88}$$

Ainsi, $L_T N = 0$ si, et seulement si,

$$L_{T'}N' + L_{T'}N'' + L_{T''}N' = 0. \tag{89}$$

Mais, dans le système de coordonnées produit considéré, les expressions matricielles des $L_{T'}N'$, $L_{T'}N''$ et $L_{T''}N'$ sont, respectivement, de type :

$$L_{T'}N' = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{T'}N'' = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_{T''}N' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, (89) est vraie si, et seulement si,

$$L_{T'}N' + L_{T'}N'' = 0 \quad \text{et} \quad L_{T''}N' = 0. \tag{90}$$

Compte tenue de la deuxième condition de (90), (87) nous donne

$$\begin{aligned} L_{T'}\Lambda''_1 + L_{T''}\Lambda'_1 &= L_{T'}N'' \cdot \Lambda''_0 + N'' \cdot L_{T'}\Lambda''_0 + L_{T''}N' \cdot \Lambda'_0 + N' \cdot L_{T''}\Lambda'_0 = \\ &= L_{T'}N'' \cdot \Lambda''_0 + N'' \cdot L_{T'}\Lambda''_0 + N' \cdot L_{T''}\Lambda'_0 = 0. \end{aligned} \tag{91}$$

En considérant maintenant les expressions locales des termes du membre de gauche de (91), on trouve que cette égalité est vérifiée si, et seulement si,

$$L_{T'}N'' \cdot \Lambda''_0 + N' \cdot L_{T''}\Lambda'_0 = 0 \quad \text{et} \quad N'' \cdot L_{T'}\Lambda''_0 = 0.$$

Alors, en dehors du lieu singulier de N'',

$$L_{T'}\Lambda''_0 = 0 \tag{92}$$

et, à cause de (84),

$$L_{T''}\Lambda'_0 = 0. \tag{93}$$

Après un calcul élémentaire on trouve que, dans le système de coordonnées locales produit considéré, (92) et (93) ont, respectivement, les expressions matricielles

$$\Lambda''_0 \cdot \left(\frac{\partial(a^i_j, b)}{\partial x''}\right) = 0 \tag{94}$$

et

$$\Lambda'_0 \cdot \left(\frac{\partial c_k}{\partial(x', y')}\right) = 0. \tag{95}$$

Comme Λ''_0 est non-dégénéré sur M'', (94) entraîne que, en dehors du lieu singulier de N'', les coefficients fonctionnels a^i_j, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, 2r_i$, $r_1 \geq \ldots \geq r_m$, et b de T' ne dépendent que des coordonnées x' et y'. Ces fonctions étant continues sur M, le résultat obtenu est vrai sur tout un voisinage de p. D'autre part, comme la restriction de Λ'_0 à ses feuilles symplectiques, définies par l'équation $y' = const.$, est inversible sur ces feuilles, (95) entraîne que, en dehors du lieu singulier de N'', les fonctions coefficients c_k, $k = 1, \ldots, dimM''$, de T'' ne dépendent que des coordonnées y' et x''. À cause de la continuité de ces fonctions sur M, la conclusion ci-dessus est aussi vraie sur tout un voisinage de p.

Bien entendu, T' et T'' sont, respectivement, champs d'homothéties de (Λ'_0, N') et de (Λ''_0, N'').

Soit S_0 la feuille symplectique de Λ_0 qui passe par p. Comme, au voisinage de p, on a la décomposition $(M, \Lambda_0, N) = (M', \Lambda'_0, N') \times (M'', \Lambda''_0, N'')$ et Λ''_0 est symplectique sur M'', $S_0 = S'_0 \times M''$, où S'_0 est la feuille symplectique de Λ'_0 qui passe par p', et, dans les coordonnées produit $((x'^i_j), y'; x''_k)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, 2r_i$, $r_1 \geq \ldots \geq r_m$, $k = 1, \ldots, dimM''$, de $M = M' \times M''$, S_0 et S'_0 sont déterminées par la même équation $y' = 0$. Les fonctions $((x'^i_j); x''_k)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, 2r_i$, $r_1 \geq \ldots \geq r_m$, $k = 1, \ldots, dimM''$, définissent sur $S_0 = S'_0 \times M''$ un système de coordonnées produit. Si $T = T' + T''$ est tangent à S_0, i.e. $b(x', y'; x'') = 0$, alors T' est tangent à S'_0, et réciproquement. Dans ce cas, T est un champ d'homothéties de la structure de Poisson-Nijenhuis symplectique induite sur S_0 par (Λ_0, N) et, respectivement, T' est un champ d'homothéties de la structure de Poisson-Nijenhuis symplectique induite sur S'_0 par (Λ'_0, N') dont l'opérateur de récursion est 0-déformable et a comme polynôme caractéristique le $(\lambda + f)^{2l-2}$. Par suite, dans le cas considéré, l'expression locale de T', dans les coordonnées (x'^i_j), $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, 2r_i$, $r_1 \geq \ldots \geq r_m$, de S'_0, est

$$T' = \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x'^1_1} + \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{r_i} x'^i_{2k-1}\frac{\partial}{\partial x'^i_{2k-1}}\right), \tag{96}$$

à addition près d'un biautomorphisme de Poisson infinitésimal de (Λ'_0, Λ'_1), $\Lambda'^{\#}_1 = N'\Lambda'^{\#}_0$, tangent à S'_0, (cf. la formule (74) et la remarque qui suit). Celle de T'', dans les coordonnées (x''_k), $k = 1, \ldots, dimM''$, de M'', est bien déterminée par le Théorème 8.3.

Partie III

Dans la troisième, et dernière, partie de ce travail, nous allons étudier le problème de construction d'une forme normale des champs de tenseurs d'une structure de Jacobi-Nijenhuis $((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$, $\mathcal{N} := (N, Y, \gamma, g)$, définie sur une variété différentiable M de dimension finie. Afin de construire ces formes, nous considérons la structure de Poisson-Nijenhuis homogène $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$ définie sur $\tilde{M} = M \times \mathbf{R}$ à partir de $((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$, (cf. Proposition 5.6). Dans le cas où $\tilde{\Lambda}_0$ est de rang maximum sur $\tilde{M}$ (ou sur un ouvert dense de $\tilde{M}$) et $\tilde{T}$ est tangent aux feuilles symplectiques de $\tilde{\Lambda}_0$, (sans doute, c'est toujours le cas lorsque $\tilde{\Lambda}_0$ est symplectique), le modèle local de $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$, sur un voisinage d'un point régulier $\tilde{p}$ de $\tilde{M}$ relativement à $\tilde{N}$, est bien déterminé, selon la parité de la dimension de $\tilde{M}$, par les Théorèmes 8.3 et 9.1 et la formule (96). Alors, en considérant d'abord : i) une sous-variété Σ de $\tilde{M}$ de codimension 1 transverse au champ d'homothéties $\tilde{T}$, ii) une fonction a définie sur un voisinage tubulaire $\tilde{U}$ de Σ dans $\tilde{M}$ égale à 1 sur Σ et homogène de degré 1 relativement à $\tilde{T}$, et iii) le couple $(\tilde{\Lambda}_0^a, \tilde{E}_0^a)$ définissant sur $\tilde{U}$ la structure de Jacobi a-conforme au modèle de la structure de Poisson, et en calculant ensuite : i) la projection de $(\tilde{\Lambda}_0^a, \tilde{E}_0^a)$ sur Σ parallèlement aux courbes intégrales du modèle de $\tilde{T}$, et ii) à partir du modèle de $\tilde{N}$, l'opérateur de Nijenhuis induit sur Σ, nous obtenons sur Σ une structure de Jacobi-Nijenhuis modèle, (cf. Proposition 5.2), qui, d'après la Proposition 5.5, est équivalente à une structure de Jacobi-Nijenhuis sur M conforme à celle initialement donnée. De cette manière, nous arrivons à établir, sur un voisinage d'un point p de M qui est la projection sur M d'un point régulier $\tilde{p}$ de $\tilde{M}$ relativement à $\tilde{N}$, un modèle d'une structure conforme à $((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$ dans les cas où :

1. M est de dimension impaire et (Λ_0, E_0) définit sur M une structure de Jacobi transitive;

2. M est de dimension paire, soit égale à $2n$, et la feuille caractéristique C_0 de (Λ_0, E_0) qui passe par p est de dimension impaire égale à 2n-1, fait qui impose que $\tilde{T} = \frac{\partial}{\partial t}$ soit tangent à la feuille symplectique correspondante de $\tilde{\Lambda}_0$, (cf. §2).

(On note que l'ensemble des points de M qui peuvent être vus comme projections de points réguliers de $\tilde{M}$ relativement à $\tilde{N}$ est un ouvert dense de M, puisque $\mathcal{R}_{\tilde{N}}$ est un ouvert dense de $\tilde{M}$.)

Le cas où M est de dimension paire et (Λ_0, E_0) définit sur M une structure de Jacobi transitive va être séparément étudié dans le paragraphe 11.

Le problème posé reste ouvert dans les autres cas où la dégénérescence de (Λ_0, E_0) est plus grande.

10 Modèles locaux de structures de Jacobi-Nijenhuis en dimension impaire

Soit $((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$, $\mathcal{N} := (N, Y, \gamma, g)$, une structure de Jacobi-Nijenhuis transitive définie sur une variété différentiable M de dimension $2n+1$, et $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$ la structure de Poisson-Nijenhuis homogène définie sur $\tilde{M} = M \times \mathbf{R}$ par $((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$, (cf. Proposition 5.6). Puisque $\tilde{\Lambda}_0 = e^{-t}(\Lambda_0 + \frac{\partial}{\partial t} \wedge E_0)$, ($t$ étant la coordonnée canonique sur le facteur $\mathbf{R}$), est non-dégénéré sur $\tilde{M}$, au voisinage de chaque point régulier $\tilde{p}$ de $\tilde{M}$ relativement à

$\tilde{N} = N + Y \otimes dt + \frac{\partial}{\partial t} \otimes \gamma + g \frac{\partial}{\partial t} \otimes dt$, le modèle de $(\tilde{M}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$ est un produit fini de variétés de Poisson-Nijenhuis symplectiques homogènes dont l'opérateur de récursion a comme polynôme caractéristique une puissance d'un polynôme irréductible, (cf. Théorème 8.3). Dans la suite, cette décomposition de $(\tilde{M}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$ sera référée comme *"décomposition modèle"* de $(\tilde{M}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$. Soit p la projection de $\tilde{p}$ sur M. Comme $\tilde{T} = \frac{\partial}{\partial t}$ est transverse en p à M, identifiée à la sous-variété $M \times \{0\}$ de $\tilde{M}$, on a qu'au moins une des composantes de la décomposition de $\tilde{T}$ est transverse en p à M. Donc, afin de construire un modèle local de $((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$, nous distinguons et nous étudions séparément les cas suivants :

1. L'opérateur de récursion de la structure de Poisson-Nijenhuis symplectique homogène correspondante à la composante considérée de $\tilde{T}$, qui est transverse en p à M, a comme polynôme caractéristique un polynôme de type $(\lambda + f)^{2q}$, $q \leq n+1$.

2. L'opérateur de récursion de la structure de Poisson-Nijenhuis symplectique homogène correspondante à la composante considérée de $\tilde{T}$, qui est transverse en p à M, a comme polynôme caractéristique un polynôme de type $(\lambda^2 + f\lambda + h)^q$, $q \leq n+1$, avec $f^2 - 4h$ localement strictement negative. (Pour éviter la confusion, dans ce paragraphe, on n'utilise pas le g comme coefficient du polynôme caractéristique de l'opérateur de récursion car il apparaît comme coefficient de $\tilde{N}$.)

Étude du cas 1

On note $(\tilde{M}', \tilde{\Lambda}'_0, \tilde{N}', \tilde{T}')$ le facteur de la "décomposition modèle" de $(\tilde{M}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$ dont le champ d'homothéties $\tilde{T}'$ est transverse en p à M, et on suppose que son opérateur de récursion $\tilde{N}'$ a comme polynôme caractéristique un polynôme de type $\mathcal{P}_{\tilde{N}'}(\lambda) = (\lambda + f)^{2q}$, $q \leq n+1$. Alors, au voisinage de $\tilde{p}$, $(\tilde{M}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T}) = (\tilde{M}', \tilde{\Lambda}'_0, \tilde{N}', \tilde{T}') \times (\tilde{M}'', \tilde{\Lambda}''_0, \tilde{N}'', \tilde{T}'')$, où $(\tilde{M}'', \tilde{\Lambda}''_0, \tilde{N}'', \tilde{T}'')$ est le produit des autres facteurs de la décomposition de $(\tilde{M}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$. Si $\tilde{p}'$ et $\tilde{p}''$ sont, respectivement, les projections de $\tilde{p}$ sur $\tilde{M}'$ et $\tilde{M}''$, la forme normale de $(\tilde{M}', \tilde{\Lambda}'_0, \tilde{N}', \tilde{T}')$, sur un voisinage de $\tilde{p}'$, est présentée par le Théorème 8.1 et la formule (74), et celle de $(\tilde{M}'', \tilde{\Lambda}''_0, \tilde{N}'', \tilde{T}'')$, sur un voisinage de $\tilde{p}''$, par le Théorème 8.3.

Maintenant, on suppose que $df(\tilde{p}') \neq 0$, et on considère un système de coordonnées locales $((\tilde{x}'^i_j), \tilde{y}'_1, \tilde{y}'_2)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, 2r_i$, $r_1 \geq \ldots \geq r_m$, de $\tilde{M}'$, où $\tilde{y}'_2 = f - \tilde{a}'$, $\tilde{a}' = f(\tilde{p}')$, centré en $\tilde{p}'$, dans lequel les champs de tenseurs $\tilde{\Lambda}'_0$, $\tilde{N}'$ et $\tilde{T}'$ ont, respectivement, les écritures de leurs modèles (67), (68) et (74). Une sous-variété de $\tilde{M}'$ de codimension 1 transverse à $\tilde{T}'$, qui passe par $\tilde{p}'$, est l'hypersurface Σ' de $\tilde{M}'$ définie par l'équation

$$\tilde{x}'^1_1 = 0,$$

(elle peut être aussi vue comme hypersurface de niveau $\frac{2}{3}$ de la fonction $\tilde{x}'^1_1 + \frac{2}{3}$ qui est le coefficient fonctionnel de $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^1_1}$ dans l'expression-modèle considérée de $\tilde{T}'$). Par ailleurs, une fonction a définie sur un voisinage tubulaire $\tilde{U}'$ de Σ' dans $\tilde{M}'$ bien choisi, ne s'annulant pas sur $\tilde{U}'$, égale à 1 sur Σ' et homogène de degré 1 relativement à $\tilde{T}'$, i.e. $L_{\tilde{T}'} a = a$, est la fonction

$$a((\tilde{x}'^i_j), \tilde{y}'_1, \tilde{y}'_2) = \frac{3}{2}\tilde{x}'^1_1 + 1.$$

On note $\pi' : \tilde{U}' \to \Sigma'$ la projection parallèlement aux courbes intégrales de $\tilde{T}'$, $T_{\Sigma'}\pi' : T_{\Sigma'}\tilde{U}' \to T\Sigma'$ le morphisme de projection du fibré vectoriel $T_{\Sigma'}\tilde{U}'$ sur son sous-fibré $T\Sigma'$,

${}^tT_{\Sigma'}\pi' : T^*\Sigma' \to T^*_{\Sigma'}\tilde{U}'$ le morphisme transposé, et $(T_{\Sigma'}\pi')_h$ la restriction de $T_{\Sigma'}\pi'$ au sous-fibré horizontal $T\Sigma'$ de $T_{\Sigma'}\tilde{U}'$ qui est une bijection.

Soit $((\Lambda'_{0\Sigma'}, E'_{0\Sigma'}), \mathcal{N}'_{\Sigma'})$, $\mathcal{N}'_{\Sigma'} := (N'_{\Sigma'}, Y'_{\Sigma'}, \gamma'_{\Sigma'}, g'_{\Sigma'})$, la structure de Jacobi-Nijenhuis induite sur Σ' par la structure de Poisson-Nijenhuis symplectique homogène $(\tilde{\Lambda}'_0, \tilde{N}', \tilde{T}')$ de $\tilde{M}'$, (cf. Proposition 5.2). On a

$$\Lambda'^{\#}_{0\Sigma'} = T_{\Sigma'}\pi' \circ (a\tilde{\Lambda}'^{\#}_0)|_{\Sigma'} \circ {}^tT_{\Sigma'}\pi', \tag{97}$$

$$E'_{0\Sigma'} = T_{\Sigma'}\pi'(\tilde{\Lambda}'^{\#}_0(da)|_{\Sigma'}), \tag{98}$$

$$N'_{\Sigma'} = T_{\Sigma'}\pi' \circ \tilde{N}'|_{\Sigma'} \circ (T_{\Sigma'}\pi')^{-1}_h, \tag{99}$$

$$Y'_{\Sigma'} = T_{\Sigma'}\pi'((\tilde{N}'\tilde{T}')|_{\Sigma'}), \tag{100}$$

$$\gamma'_{\Sigma'} = ({}^t\tilde{N}'da)|_{\Sigma'} - \langle ({}^t\tilde{N}'da)|_{\Sigma'}, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^1_1}|_{\Sigma'}\rangle d\tilde{x}'^1_1|_{\Sigma'}, \tag{101}$$

$$g'_{\Sigma'} = \langle da|_{\Sigma'}, (\tilde{N}'\tilde{T}')|_{\Sigma'}\rangle. \tag{102}$$

Leur calcul nous donne :

$$\begin{aligned}
\Lambda'_{0\Sigma'} &= -\frac{3}{2}\left[\sum_{k=2}^{r_1} \tilde{x}'^1_{2k-1}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^1_{2k-1}} + \sum_{i=2}^{m}\left(\sum_{k=1}^{r_i} \tilde{x}'^i_{2k-1}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^i_{2k-1}}\right) + \tilde{y}'_1\frac{\partial}{\partial \tilde{y}'_1}\right] \wedge \frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^1_2} + \\
&+ \sum_{k=2}^{r_1} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^1_{2k-1}} \wedge \frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^1_{2k}} + \sum_{i=2}^{m}\left(\sum_{k=1}^{r_i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^i_{2k-1}} \wedge \frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^i_{2k}}\right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}'_1} \wedge \frac{\partial}{\partial \tilde{y}'_2},
\end{aligned} \tag{103}$$

$$E'_{0\Sigma'} = \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^1_2}, \tag{104}$$

$$N'_{\Sigma'} = -(\tilde{y}'_2 + \tilde{a}')Id_{\Sigma'} - \frac{3}{2}T'_{\Sigma'} \otimes d\tilde{x}'^1_3 + H'_{\Sigma'} + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}'_1} \otimes \alpha'_{\Sigma'} + (\frac{3}{2}T'_{\Sigma'} - Z'_{\Sigma'}) \otimes d\tilde{y}'_2, \tag{105}$$

où $-\frac{3}{2}T'_{\Sigma'}$ est la projection de $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^1_1}|_{\Sigma'}$ sur $T\Sigma'$ parallèlement à $\tilde{T}'$,

$$T'_{\Sigma'} = \sum_{k=2}^{r_1} \tilde{x}'^1_{2k-1}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^1_{2k-1}} + \sum_{i=2}^{m}\left(\sum_{k=1}^{r_i} \tilde{x}'^i_{2k-1}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^i_{2k-1}}\right) + \tilde{y}'_1\frac{\partial}{\partial \tilde{y}'_1}, \tag{106}$$

$$\begin{aligned}
H'_{\Sigma'} &= \sum_{k=2}^{r_1-1}\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^1_{2k-1}} \otimes d\tilde{x}'^1_{2k+1}\right) + \sum_{k=1}^{r_1-1}\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^1_{2k+2}} \otimes d\tilde{x}'^1_{2k}\right) + \\
&+ \sum_{i=2}^{m}\left[\sum_{k=1}^{r_i-1}\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^i_{2k-1}} \otimes d\tilde{x}'^i_{2k+1} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^i_{2k+2}} \otimes d\tilde{x}'^i_{2k}\right)\right],
\end{aligned} \tag{107}$$

$$\begin{aligned}
\alpha'_{\Sigma'} &= d\tilde{x}'^1_2 + \sum_{k=2}^{r_1}\left[(k-\frac{1}{2})\tilde{x}'^1_{2k}d\tilde{x}'^1_{2k-1}\right] + \sum_{k=1}^{r_1}\left[(k+\frac{1}{2})\tilde{x}'^1_{2k-1}d\tilde{x}'^1_{2k}\right] + \\
&+ \sum_{i=2}^{m}\left(\sum_{k=1}^{r_i}\left[(k-\frac{1}{2})\tilde{x}'^i_{2k}d\tilde{x}'^i_{2k-1} + (k+\frac{1}{2})\tilde{x}'^i_{2k-1}d\tilde{x}'^i_{2k}\right]\right),
\end{aligned} \tag{108}$$

$$Z'_{\Sigma'} = \sum_{k=2}^{r_1}\left[(k+\frac{1}{2})\tilde{x}'^1_{2k-1}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}'^1_{2k-1}}\right] - \sum_{k=1}^{r_1}\left[(k-\frac{1}{2})\tilde{x}'^1_{2k}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}'^1_{2k}}\right] + \\ + \sum_{i=2}^{m}\left(\sum_{k=1}^{r_i}\left[(k+\frac{1}{2})\tilde{x}'^i_{2k-1}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}'^i_{2k-1}} - (k-\frac{1}{2})\tilde{x}'^i_{2k}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}'^i_{2k}}\right]\right), \tag{109}$$

$$Y'_{\Sigma'} = \sum_{k=2}^{r_1-1}(\tilde{x}'^1_{2k+1} - \frac{3}{2}\tilde{x}'^1_3\tilde{x}'^1_{2k-1})\frac{\partial}{\partial\tilde{x}'^1_{2k-1}} - \frac{3}{2}\tilde{x}'^1_3\tilde{x}'^1_{2r_1-1}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}'^1_{2r_1-1}} + \\ + \sum_{i=2}^{m}\left[\sum_{k=1}^{r_i-1}(\tilde{x}'^i_{2k+1} - \frac{3}{2}\tilde{x}'^1_3\tilde{x}'^i_{2k-1})\frac{\partial}{\partial\tilde{x}'^i_{2k-1}}\right] - \sum_{i=2}^{m}\frac{3}{2}\tilde{x}'^1_3\tilde{x}'^i_{2r_i-1}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}'^i_{2r_i-1}} + \\ + \left(\frac{1}{3}\tilde{x}'^1_2 + \sum_{k=2}^{r_1}(k-\frac{1}{2})\tilde{x}'^1_{2k-1}\tilde{x}'^1_{2k} + \sum_{i=2}^{m}\left[\sum_{k=1}^{r_i}(k-\frac{1}{2})\tilde{x}'^i_{2k-1}\tilde{x}'^i_{2k}\right] - \frac{3}{2}\tilde{x}'^1_3\tilde{y}'_1\right)\frac{\partial}{\partial\tilde{y}'_1}, \tag{110}$$

$$\gamma'_{\Sigma'} = \frac{3}{2}(d\tilde{x}'^1_3 - d\tilde{y}'_2), \tag{111}$$

$$g'_{\Sigma'} = -(\tilde{y}'_2 + \tilde{a}') + \frac{3}{2}\tilde{x}'^1_3. \tag{112}$$

(D'après la remarque du Théorème 8.1, si $df(\tilde{p}') = 0$, les expressions locales obtenues des champs de tenseurs de $((\Lambda'_{0\Sigma'}, E'_{0\Sigma'}), \mathcal{N}'_{\Sigma'})$ ne contiennent pas les coordonnées $\tilde{y}'_1$ et $\tilde{y}'_2$.)

On considère maintenant un système de coordonnées locales $\tilde{x}''$ de $\tilde{M}''$, centré en $\tilde{p}''$, dans lequel $(\tilde{\Lambda}''_0, \tilde{N}'', \tilde{T}'')$ a l'expression de son modèle, (cf. Théorème 8.3), et le système produit $((\tilde{x}'^i_j), \tilde{y}'_1, \tilde{y}'_2; \tilde{x}'')$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, 2r_i$, $r_1 \geq \ldots \geq r_m$, de $\tilde{M} = \tilde{M}' \times \tilde{M}''$, où $\tilde{y}'_2 = f - \tilde{a}'$, $\tilde{a}' = f(\tilde{p}')$, centré en $\tilde{p} = (\tilde{p}', \tilde{p}'')$. En plus, on considère la sous-variété $\Sigma = \Sigma' \times \tilde{M}''$ de $\tilde{M} = \tilde{M}' \times \tilde{M}''$ de codimension 1 transverse à $\tilde{T}' + \tilde{T}''$ définie, bien entendu, par

$$\tilde{x}'^1_1 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Soit $((\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma}), \mathcal{N}_\Sigma)$, $\mathcal{N}_\Sigma := (N_\Sigma, Y_\Sigma, \gamma_\Sigma, g_\Sigma)$, la structure de Jacobi-Nijenhuis induite sur $\Sigma = \Sigma' \times \tilde{M}''$ par la structure de Poisson-Nijenhuis symplectique homogène produit $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T}) = (\tilde{\Lambda}'_0, \tilde{N}', \tilde{T}') + (\tilde{\Lambda}''_0, \tilde{N}'', \tilde{T}'')$ de $\tilde{M} = \tilde{M}' \times \tilde{M}''$, (cf. Propositions 5.2 et 5.4). D'après la Proposition 5.4, on a

$$\Lambda_{0\Sigma} = \Lambda'_{0\Sigma'} + \tilde{\Lambda}''_0 - \tilde{T}'' \wedge E'_{0\Sigma'} \quad \text{et} \quad E_{0\Sigma} = E'_{0\Sigma'}, \tag{113}$$

$$N_\Sigma = N'_{\Sigma'} + \tilde{N}'' - \tilde{T}'' \otimes \gamma'_{\Sigma'}, \tag{114}$$

$$Y_\Sigma = Y'_{\Sigma'} + \left(\tilde{N}'' - g'_{\Sigma'} Id_{T\tilde{M}''}\right)\tilde{T}'', \tag{115}$$

$$\gamma_\Sigma = \gamma'_{\Sigma'}, \tag{116}$$

$$g_\Sigma = g'_{\Sigma'}. \tag{117}$$

Étant connues les formes normales des champs de tenseurs de $((\Lambda'_{0\Sigma'}, E'_{0\Sigma'}), \mathcal{N}'_{\Sigma'})$, $\mathcal{N}'_{\Sigma'} := (N'_{\Sigma'}, Y'_{\Sigma'}, \gamma'_{\Sigma'}, g'_{\Sigma'})$, dans les coordonnées établies de Σ', (cf. relations (103)-(112)), et de $(\tilde{\Lambda}''_0, \tilde{N}'', \tilde{T}'')$ dans le système considéré $\tilde{x}''$ de $\tilde{M}''$, (cf. Théorème 8.3), les formules (113)-(117) nous donnent l'écriture locale des champs de tenseurs de $((\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma}), \mathcal{N}_\Sigma)$,

$\mathcal{N}_\Sigma := (N_\Sigma, Y_\Sigma, \gamma_\Sigma, g_\Sigma)$ dans le système de coordonnées produit $(\tilde{x}_2'^1, \ldots, \tilde{x}_{2r_m}'^m, \tilde{y}_1', \tilde{y}_2'; \tilde{x}'')$ de $\Sigma = \Sigma' \times \tilde{M}''$.

Étude du cas 2

On travaille comme dans le cas 1. On note $(\tilde{M}', \tilde{\Lambda}_0', \tilde{N}', \tilde{T}')$ le facteur de la "décomposition modèle" de $(\tilde{M}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$ dont le champ d'homothéties $\tilde{T}'$ est transverse en p à M, et on suppose que son opérateur de récursion $\tilde{N}'$ a comme polynôme caractéristique un polynôme de type $\mathcal{P}_{\tilde{N}'}(\lambda) = (\lambda^2 + f\lambda + h)^q$, $q \leq n+1$, avec $f^2 - 4h$ localement strictement negative. Alors, au voisinage de $\tilde{p}$, $(\tilde{M}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T}) = (\tilde{M}', \tilde{\Lambda}_0', \tilde{N}', \tilde{T}') \times (\tilde{M}'', \tilde{\Lambda}_0'', \tilde{N}'', \tilde{T}'')$, où $(\tilde{M}'', \tilde{\Lambda}_0'', \tilde{N}'', \tilde{T}'')$ est le produit des autres facteurs de la décomposition de $(\tilde{M}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$. Si $\tilde{p}'$ et $\tilde{p}''$ sont, respectivement, les projections de $\tilde{p}$ sur $\tilde{M}'$ et $\tilde{M}''$, la forme normale de $(\tilde{M}', \tilde{\Lambda}_0', \tilde{N}', \tilde{T}')$, sur un voisinage de $\tilde{p}'$, est présentée par le Théorème 8.2 et la formule (79), et celle de $(\tilde{M}'', \tilde{\Lambda}_0'', \tilde{N}'', \tilde{T}'')$, sur un voisinage de $\tilde{p}''$, par le Théorème 8.3.

Soit $\big((\tilde{x}_l'^j), \tilde{u}_1', \tilde{u}_2', (\tilde{y}_l'^j), \tilde{v}_1', \tilde{v}_2'\big)$, $j = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots, 2r_j$, $r_1 \geq \ldots \geq r_m$, un système de coordonnées locales de $\tilde{M}'$, centré en $\tilde{p}'$, dans lequel les champs de tenseurs $\tilde{\Lambda}_0'$, $\tilde{N}'$ et $\tilde{T}'$ ont, respectivement, les expressions de leurs modèles (75), (76) et (79). Comme sous-variété de $\tilde{M}'$ de codimension 1 transverse à $\tilde{T}'$, on considère l'hypersurface Σ' de $\tilde{M}'$, qui passe par $\tilde{p}'$, définie par l'équation

$$\tilde{x}_1'^1 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Une fonction a définie sur un voisinage tubulaire $\tilde{U}'$ de Σ' dans $\tilde{M}'$ bien choisi, ne s'annulant pas sur $\tilde{U}'$, égale à 1 sur Σ' et homogène de degré 1 relativement à $\tilde{T}'$, est la fonction

$$a((\tilde{x}_l'^j), \tilde{u}_1', \tilde{u}_2', (\tilde{y}_l'^j), \tilde{v}_1', \tilde{v}_2') = \frac{3}{2}\tilde{x}_1'^1 + 1.$$

On note $\pi' : \tilde{U}' \to \Sigma'$ la projection parallèlement aux courbes intégrales de $\tilde{T}'$, $T_{\Sigma'}\pi' : T_{\Sigma'}\tilde{U}' \to T\Sigma'$ le morphisme de projection du fibré vectoriel $T_{\Sigma'}\tilde{U}'$ sur son sous-fibré $T\Sigma'$, ${}^tT_{\Sigma'}\pi' : T^*\Sigma' \to T^*_{\Sigma'}\tilde{U}'$ le morphisme transposé, et $(T_{\Sigma'}\pi')_h : T\Sigma' \to T\Sigma'$ la restriction de $T_{\Sigma'}\pi'$ au sous-fibré horizontal $T\Sigma'$ de $T_{\Sigma'}\tilde{U}'$, qui est une bijection.

Soit $((\Lambda_{0\Sigma'}', E_{0\Sigma'}'), \mathcal{N}_{\Sigma'}')$, $\mathcal{N}_{\Sigma'}' := (N_{\Sigma'}', Y_{\Sigma'}', \gamma_{\Sigma'}', g_{\Sigma'}')$, la structure de Jacobi-Nijenhuis induite sur Σ' par la structure de Poisson-Nijenhuis symplectique homogène $(\tilde{\Lambda}_0', \tilde{N}', \tilde{T}')$ de $\tilde{M}'$, (cf. Proposition 5.2). Les champs de tenseurs qui la définissent sont, respectivement, donnés par les formules (97)-(102). Dans le cas étudié, leur calcul nous donne :

$$\begin{aligned}
\Lambda_{0\Sigma'}' &= -\frac{3}{8}\left[\sum_{k=2}^{r_1} \tilde{x}_{2k-1}'^1 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_{2k-1}'^1} + \sum_{j=2}^{m}\left(\sum_{k=1}^{r_j} \tilde{x}_{2k-1}'^j \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_{2k-1}'^j}\right) + \right. \\
&+ \left. \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{r_j} \tilde{y}_{2k-1}'^j \frac{\partial}{\partial \tilde{y}_{2k-1}'^j}\right) + \tilde{u}_1' \frac{\partial}{\partial \tilde{u}_1'} + \tilde{v}_1' \frac{\partial}{\partial \tilde{v}_1'}\right] \wedge \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2'^1} + \\
&+ \sum_{k=2}^{r_1} \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_{2k-1}'^1} \wedge \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_{2k}'^1} + \sum_{j=2}^{m}\left(\sum_{k=1}^{r_j} \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_{2k-1}'^j} \wedge \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_{2k}'^j}\right) - \\
&- \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{r_j} \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}_{2k-1}'^j} \wedge \frac{\partial}{\partial \tilde{y}_{2k}'^j}\right) + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial \tilde{u}_1'} \wedge \frac{\partial}{\partial \tilde{u}_2'} - \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial \tilde{v}_1'} \wedge \frac{\partial}{\partial \tilde{v}_2'},
\end{aligned} \tag{118}$$

$$E'_{0\Sigma'} = \frac{3}{8}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^1_2}, \tag{119}$$

$$\begin{aligned} N'_{\Sigma'} &= -(\tilde{u}'_2 + \tilde{a}')Id_{\Sigma'} - \frac{3}{2}T'_{\Sigma'} \otimes d\tilde{x}'^1_3 + H'_{\tilde{x}'\Sigma'} - (\tilde{v}'_2 + \tilde{b}')J_{\Sigma'} - (\tilde{v}'_2 + \tilde{b}')\frac{3}{2}T'_{\Sigma'} \otimes d\tilde{y}'^1_1 + \\ &+ (\frac{3}{2}T'_{\Sigma'} - Z'_{\tilde{x}'\Sigma'}) \otimes (d\tilde{u}'_2 + d\tilde{v}'_2) + H'_{\tilde{y}'} - Z'_{\tilde{y}'} \otimes (d\tilde{u}'_2 - d\tilde{v}'_2) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \tilde{u}'_1} \otimes (\alpha'_{\tilde{x}'\Sigma'} - \alpha'_{\tilde{y}'}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{v}'_1} \otimes (\alpha'_{\tilde{x}'\Sigma'} + \alpha'_{\tilde{y}'}), \end{aligned} \tag{120}$$

où $-\frac{3}{2}T'_{\Sigma'}$ est la projection de $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^1_1}|_{\Sigma'}$ sur $T\Sigma'$ selon la direction de $\tilde{T}'$,

$$T'_{\Sigma'} = \sum_{k=2}^{r_1} \tilde{x}'^1_{2k-1}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^1_{2k-1}} + \sum_{j=2}^{m}\left(\sum_{k=1}^{r_j} \tilde{x}'^j_{2k-1}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^j_{2k-1}}\right) + \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{r_j} \tilde{y}'^j_{2k-1}\frac{\partial}{\partial \tilde{y}'^j_{2k-1}}\right) + \tilde{u}'_1\frac{\partial}{\partial \tilde{u}'_1} + \tilde{v}'_1\frac{\partial}{\partial \tilde{v}'_1},$$

$$\begin{aligned} J_{\Sigma'} &= \sum_{l=2}^{2r_1}\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}'^1_l} \otimes d\tilde{x}'^1_l - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^1_l} \otimes d\tilde{y}'^1_l\right) + \sum_{j=2}^{m}\sum_{l=1}^{2r_j}\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}'^j_l} \otimes d\tilde{x}'^j_l - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^j_l} \otimes d\tilde{y}'^j_l\right) - \\ &- \frac{\partial}{\partial \tilde{u}'_1} \otimes d\tilde{v}'_1 - \frac{\partial}{\partial \tilde{u}'_2} \otimes d\tilde{v}'_2 + \frac{\partial}{\partial \tilde{v}'_1} \otimes d\tilde{u}'_1 + \frac{\partial}{\partial \tilde{v}'_2} \otimes d\tilde{u}'_2, \end{aligned}$$

les champs de tenseurs $H'_{\tilde{x}'\Sigma'}$, $\alpha'_{\tilde{x}'\Sigma'}$, $Z'_{\tilde{x}'\Sigma'}$ ont, respectivement, les expressions (107), (108), (109), et les $H'_{\tilde{y}'}$, $\alpha'_{\tilde{y}'}$, $Z'_{\tilde{y}'}$ ont celles qui figurent dans le Théorème 8.2,

$$\begin{aligned} Y'_{\Sigma'} &= \sum_{k=2}^{r_1-1}\left[\tilde{x}'^1_{2k+1} + (\tilde{v}'_2 + \tilde{b}')\tilde{y}'^1_{2k-1} - \frac{3}{2}(\tilde{x}'^1_3 + (\tilde{v}'_2 + \tilde{b}')\tilde{y}'^1_1)\tilde{x}'^1_{2k-1}\right]\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^1_{2k-1}} + \\ &+ \sum_{j=2}^{m}\sum_{k=1}^{r_j-1}\left[\tilde{x}'^j_{2k+1} + (\tilde{v}'_2 + \tilde{b}')\tilde{y}'^j_{2k-1} - \frac{3}{2}(\tilde{x}'^1_3 + (\tilde{v}'_2 + \tilde{b}')\tilde{y}'^1_1)\tilde{x}'^j_{2k-1}\right]\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^j_{2k-1}} + \\ &+ \sum_{j=1}^{m}\left[(\tilde{v}'_2 + \tilde{b}')\tilde{y}'^j_{2r_j-1} - \frac{3}{2}(\tilde{x}'^1_3 + (\tilde{v}'_2 + \tilde{b}')\tilde{y}'^1_1)\tilde{x}'^j_{2r_j-1}\right]\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^j_{2r_j-1}} + \\ &+ \left[-\frac{2}{3}(\tilde{v}'_2 + \tilde{b}') + \tilde{y}'^1_3 - \frac{3}{2}(\tilde{x}'^1_3 + (\tilde{v}'_2 + \tilde{b}')\tilde{y}'^1_1)\tilde{y}'^1_1\right]\frac{\partial}{\partial \tilde{y}'^1_1} + \\ &+ \sum_{k=2}^{r_1-1}\left[-(\tilde{v}'_2 + \tilde{b}')\tilde{x}'^1_{2k-1} + \tilde{y}'^1_{2k+1} - \frac{3}{2}(\tilde{x}'^1_3 + (\tilde{v}'_2 + \tilde{b}')\tilde{y}'^1_1)\tilde{y}'^1_{2k-1}\right]\frac{\partial}{\partial \tilde{y}'^1_{2k-1}} + \\ &+ \sum_{j=2}^{m}\sum_{k=1}^{r_j-1}\left[-(\tilde{v}'_2 + \tilde{b}')\tilde{x}'^j_{2k-1} + \tilde{y}'^j_{2k+1} - \frac{3}{2}(\tilde{x}'^1_3 + (\tilde{v}'_2 + \tilde{b}')\tilde{y}'^1_1)\tilde{y}'^j_{2k-1}\right]\frac{\partial}{\partial \tilde{y}'^j_{2k-1}} + \\ &+ \sum_{j=1}^{m}\left[-(\tilde{v}'_2 + \tilde{b}')\tilde{x}'^j_{2r_j-1} - \frac{3}{2}(\tilde{x}'^1_3 + (\tilde{v}'_2 + \tilde{b}')\tilde{y}'^1_1)\tilde{y}'^j_{2r_j-1}\right]\frac{\partial}{\partial \tilde{y}'^j_{2r_j-1}} + \\ &+ \left[\frac{1}{3}\tilde{x}'^1_2 + \sum_{k=2}^{r_1}(k - \frac{1}{2})\tilde{x}'^1_{2k-1}\tilde{x}'^1_{2k} + \sum_{j=2}^{m}\sum_{k=1}^{r_j}(k - \frac{1}{2})\tilde{x}'^j_{2k-1}\tilde{x}'^j_{2k} - \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r_j}(k - \frac{1}{2})\tilde{y}'^j_{2k-1}\tilde{y}'^j_{2k} + \right. \\ &+ \left. \tilde{v}'_1(\tilde{v}'_2 + \tilde{b}') - \frac{3}{2}(\tilde{x}'^1_3 + (\tilde{v}'_2 + \tilde{b}')\tilde{y}'^1_1)\tilde{u}'_1\right]\frac{\partial}{\partial \tilde{u}'_1} + \end{aligned}$$

$$+ \quad \left[\frac{1}{3}\tilde{x}'^1_2 + \sum_{k=2}^{r_1}(k-\frac{1}{2})\tilde{x}'^1_{2k-1}\tilde{x}'^1_{2k} + \sum_{j=2}^{m}\sum_{k=1}^{r_j}(k-\frac{1}{2})\tilde{x}'^j_{2k-1}\tilde{x}'^j_{2k} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r_j}(k-\frac{1}{2})\tilde{y}'^j_{2k-1}\tilde{y}'^j_{2k} - \right.$$

$$- \quad \left. \tilde{u}'_1(\tilde{v}'_2+\tilde{b}') - \frac{3}{2}(\tilde{x}'^1_3 + (\tilde{v}'_2+\tilde{b}')\tilde{y}'^1_1)\tilde{v}'_1\right]\frac{\partial}{\partial \tilde{v}'_1}, \tag{121}$$

$$\gamma'_{\Sigma'} = \frac{3}{2}(d\tilde{x}'^1_3 + (\tilde{v}'_2+\tilde{b}')d\tilde{y}'^1_1 - d\tilde{u}'_2 - d\tilde{v}'_2), \tag{122}$$

$$g'_{\Sigma'} = -(\tilde{u}'_2+\tilde{a}') + \frac{3}{2}(\tilde{x}'^1_3 + (\tilde{v}'_2+\tilde{b}')\tilde{y}'^1_1). \tag{123}$$

Ensuite, on considère un système de coordonnées locales $\tilde{x}''$ de $\tilde{M}''$, centré en $\tilde{p}''$, dans lequel $(\tilde{\Lambda}''_0, \tilde{N}'', \tilde{T}'')$ a l'expression de son modèle, (cf. Théorème 8.3), et le système produit $\Big((\tilde{x}'^j_l), \tilde{u}'_1, \tilde{u}'_2, (\tilde{y}'^j_l), \tilde{v}'_1, \tilde{v}'_2; \tilde{x}''\Big)$, $j = 1,\ldots,m$, $l = 1,\ldots,2r_j$, $r_1 \geq \ldots \geq r_m$, de $\tilde{M} = \tilde{M}' \times \tilde{M}''$, centré en $\tilde{p} = (\tilde{p}', \tilde{p}'')$. En plus, on considère la sous-variété $\Sigma = \Sigma' \times \tilde{M}''$ de $\tilde{M} = \tilde{M}' \times \tilde{M}''$ de codimension 1 transverse en $\tilde{p} = (\tilde{p}', \tilde{p}'')$ à $\tilde{T}' + \tilde{T}''$ définie, bien entendu, par

$$\tilde{x}'^1_1 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Soit $((\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma}), \mathcal{N}_\Sigma)$, $\mathcal{N}_\Sigma := (N_\Sigma, Y_\Sigma, \gamma_\Sigma, g_\Sigma)$, la structure de Jacobi-Nijenhuis induite sur $\Sigma = \Sigma' \times \tilde{M}''$ par la structure de Poisson-Nijenhuis symplectique homogène produit $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T}) = (\tilde{\Lambda}'_0, \tilde{N}', \tilde{T}') + (\tilde{\Lambda}''_0, \tilde{N}'', \tilde{T}'')$ de $\tilde{M} = \tilde{M}' \times \tilde{M}''$, (cf. Propositions 5.2 et 5.4). De la Proposition 5.4 on déduit les expressions des champs de tenseurs de $(\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma})$ et de $\mathcal{N}_\Sigma := (N_\Sigma, Y_\Sigma, \gamma_\Sigma, g_\Sigma)$ qui sont, respectivement, présentées, par les formules (113) et (114)-(117). Alors, en tenant compte des expressions locales établies de $(\Lambda'_{0\Sigma'}, E'_{0\Sigma'})$ et de $\mathcal{N}'_{\Sigma'} := (N'_{\Sigma'}, Y'_{\Sigma'}, \gamma'_{\Sigma'}, g'_{\Sigma'})$ dans les coordonnées construites de Σ', (cf. relations (118)-(123)), et celles de $(\tilde{\Lambda}''_0, \tilde{N}'', \tilde{T}'')$ dans le système de coordonnées considéré $\tilde{x}''$ de $\tilde{M}''$, (cf. Théorème 8.3), les (113)-(117) nous donnent l'écriture locale de $(\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma})$ et de $\mathcal{N}_\Sigma := (N_\Sigma, Y_\Sigma, \gamma_\Sigma, g_\Sigma)$ dans le système de coordonnées produit $(\tilde{x}'^1_2, \ldots, \tilde{x}'^m_{2r_m}, \tilde{u}'_1, \tilde{u}'_2, \tilde{y}'^1_1, \ldots, \tilde{y}'^m_{2r_m}, \tilde{v}'_1, \tilde{v}'_2; \tilde{x}'')$ de $\Sigma = \Sigma' \times \tilde{M}''$.

En conclusion, nous énonçons le théorème suivant.

Théorème 10.1 *Soit $((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$, $\mathcal{N} := (N, Y, \gamma, g)$, une structure de Jacobi-Nijenhuis transitive définie sur une variété différentiable M de dimension $2n+1$, $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$ la structure de Poisson-Nijenhuis symplectique homogène associée sur $\tilde{M} = M \times \mathbf{R}$, et p un point générique de M, vu comme projection sur M d'un point régulier $\tilde{p}$ de $\tilde{M}$ relativement à $\tilde{N}$. Soit, en plus, $(\tilde{M}', \tilde{\Lambda}'_0, \tilde{N}', \tilde{T}')$ un facteur de la "décomposition modèle" de $(\tilde{M}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$ dont le champ d'homothéties $\tilde{T}'$ est supposé transverse en p à M, Σ une sous-variété de $\tilde{M}$ passant par $\tilde{p}$ de codimension 1 transverse à $\tilde{T}$, et $((\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma}), \mathcal{N}_\Sigma)$, $\mathcal{N}_\Sigma := (N_\Sigma, Y_\Sigma, \gamma_\Sigma, g_\Sigma)$, la structure de Jacobi-Nijenhuis induite sur Σ par $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$. Si le polynôme caractéristique de $\tilde{N}'$ est du type $\mathcal{P}_{\tilde{N}'}(\lambda) = (\lambda + f)^{2q}$ (resp. $\mathcal{P}_{\tilde{N}'}(\lambda) = (\lambda^2 + f\lambda + h)^q$, avec $f^2 - 4h$ localement strictement negative), $q \leq n+1$, alors, il existe sur un voisinage de $\tilde{p}$ dans Σ un système de coordonnées locales de Σ, centré en $\tilde{p}$, dans lequel les champs de tenseurs de $(\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma})$ et de $\mathcal{N}_\Sigma := (N_\Sigma, Y_\Sigma, \gamma_\Sigma, g_\Sigma)$ ont, respectivement, les expressions (113) et (114)-(117), compte tenu des formules (103)-(112) (resp. des formules (118)-(123)). La structure $((\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma}), \mathcal{N}_\Sigma)$ est localement équivalente à une structure conforme à $((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$.*

11 Modèles locaux de structures de Jacobi-Nijenhuis en dimension paire

Soit $((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$, $\mathcal{N} := (N, Y, \gamma, g)$, une structure de Jacobi-Nijenhuis définie sur une variété différentiable M de dimension $2n$, et $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$ la structure de Poisson-Nijenhuis homogène définie sur $\tilde{M} = M \times \mathbf{R}$ par $((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$, (cf. Proposition 5.6). On suppose que (Λ_0, E_0) est telle que, sa Poissonisation $\tilde{\Lambda}_0 = e^{-t}(\Lambda_0 + \frac{\partial}{\partial t} \wedge E_0)$, ($t$ étant la coordonnée canonique sur le facteur $\mathbf{R}$), soit de rang maximum sur un ouvert dense de $\tilde{M} = M \times \mathbf{R}$. Soit p un point générique de M, i.e. p peut être vu comme projection sur M d'un point régulier $\tilde{p}$ de $\tilde{M}$ relativement à $\tilde{N} = N + Y \otimes dt + \frac{\partial}{\partial t} \otimes \gamma + g \frac{\partial}{\partial t} \otimes dt$ tel que $corang\, \tilde{\Lambda}_0(\tilde{p}) = 1$. Notre but est la construction d'un modèle de $((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$ sur un voisinage de p. On remarque que la feuille caractéristique C_0 de (Λ_0, E_0) qui passe par p est la projection sur M, parallèlement aux courbes intégrales de $\tilde{T} = \frac{\partial}{\partial t}$, de la feuille symplectique $\tilde{S}_0$ de $\tilde{\Lambda}_0$ qui passe par $\tilde{p}$, (cf. §2); bien entendu, $dim\, \tilde{S}_0 = 2n$. Alors,

- si $\tilde{T} = \frac{\partial}{\partial t}$ est tangent à $\tilde{S}_0$, la feuille C_0 est de dimension $2n - 1$, et on a que $rang\, \Lambda_0(p) = 2n - 2$ et que $E_0(p) \notin \mathrm{Im}\Lambda_0^{\#}(p)$;
- si $\tilde{T} = \frac{\partial}{\partial t}$ n'est pas tangent à $\tilde{S}_0$, la feuille C_0 est de dimension $2n$, i.e. $dim\, C_0 = dim\, M$, par suite $rang\, \Lambda_0(p) = 2n$ et $E_0(p) \in \mathrm{Im}\Lambda_0^{\#}(p)$, et la restriction à $\tilde{S}_0$ de la projection de $\tilde{M}$ sur M parallèlement aux courbes intégrales de $\tilde{T} = \frac{\partial}{\partial t}$ est un difféomorphisme local de $\tilde{S}_0$ sur C_0. Alors, dans ce cas, (Λ_0, E_0) est transitive sur un voisinage de p dans M.

Afin donc d'établir un modèle de $((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$ au voisinage de p, nous étudions séparément les cas distingués ci-dessus.

11.1 Étude du cas où $\frac{\partial}{\partial t}$ est tangent à $\tilde{S}_0$

Dans ce cas, pour la construction de la forme canonique de $((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$ sur un voisinage de p, nous appliquons la technique développée dans le paragraphe précédent. D'après le Théorème 9.1 et l'étude qui suit, sur un voisinage de $\tilde{p}$, le modèle de $(\tilde{M}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$ est un produit d'une variété de Poisson-Nijenhuis homogène $(\tilde{M}', \tilde{\Lambda}_0', \tilde{N}', \tilde{T}')$ de dimension impaire $2l - 1$, $l \leq n + 1$, dont l'opérateur de récursion $\tilde{N}'$ a comme polynôme caractéristique un polynôme de type $\mathcal{P}_{\tilde{N}'}(\lambda) = (\lambda + f)^{2l-1}$ et dont le champ d'homothéties $\tilde{T}'$ est tangent à la feuille symplectique $\tilde{S}_0'$ de $\tilde{\Lambda}_0'$ qui passe par la projection $\tilde{p}'$ de $\tilde{p}$ sur $\tilde{M}'$, et d'une variété de Poisson-Nijenhuis symplectique homogène $(\tilde{M}'', \tilde{\Lambda}_0'', \tilde{N}'', \tilde{T}'')$. La forme canonique de $(\tilde{M}', \tilde{\Lambda}_0', \tilde{N}', \tilde{T}')$ est bien décrite par le Théorème 9.1 et la formule (96) et celle de $(\tilde{M}'', \tilde{\Lambda}_0'', \tilde{N}'', \tilde{T}'')$ par le Théorème 8.3. Dans la suite, cette décomposition de $(\tilde{M}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$ sera référée comme *"décomposition modèle"* de $(\tilde{M}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$. Puisque $\tilde{T} = \frac{\partial}{\partial t}$ est supposé transverse en p à M, identifiée à la sous-variété $M \times \{0\}$ de $\tilde{M}$, on a qu'au moins une de ses composantes est transverse en p à M. Nous distinguons et nous traitons séparément les cas suivants :

1. La composante de $\tilde{T}$ qui est transverse en p à M est $\tilde{T}'$.
2. La composante de $\tilde{T}$ qui est transverse en p à M est $\tilde{T}''$.

Étude du cas 1

On considère le facteur $(\tilde{M}', \tilde{\Lambda}'_0, \tilde{N}', \tilde{T}')$ de la "décomposition modèle" de $(\tilde{M}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$ qui possède les propriétés spécifiées ci-dessus et dont le champ d'homothéties $\tilde{T}'$ est supposé transverse en p à M. On suppose que $df(\tilde{p}') \neq 0$, et on considère un système de coordonnées locales $((\tilde{x}'^i_j), \tilde{y}')$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, 2r_i$, $r_1 \geq \dots \geq r_m$, de $\tilde{M}'$, où $\tilde{y}' = f - \tilde{a}'$, $\tilde{a}' = f(\tilde{p}')$, centré en $\tilde{p}'$, dans lequel les champs de tenseurs $\tilde{\Lambda}'_0$, $\tilde{N}'$ et $\tilde{T}'$ ont, respectivement, les expressions de leurs modèles (80), (81) et (96). Comme sous-variété de $\tilde{M}'$ de codimension 1 transverse à $\tilde{T}'$, on considère l'hypersurface Σ' de $\tilde{M}'$, qui passe par $\tilde{p}'$, définie par l'équation

$$\tilde{x}'^1_1 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Une fonction a définie sur un voisinage tubulaire $\tilde{U}'$ de Σ' dans $\tilde{M}'$ bien choisi, ne s'annulant pas sur $\tilde{U}'$, égale à 1 sur Σ' et homogène de degré 1 relativement à $\tilde{T}'$, est la fonction

$$a((\tilde{x}'^i_j), \tilde{y}') = \frac{3}{2}\tilde{x}'^1_1 + 1.$$

Soit $((\Lambda'_{0\Sigma'}, E'_{0\Sigma'}), \mathcal{N}'_{\Sigma'})$, $\mathcal{N}'_{\Sigma'} := (N'_{\Sigma'}, Y'_{\Sigma'}, \gamma'_{\Sigma'}, g'_{\Sigma'})$, la structure de Jacobi-Nijenhuis induite sur Σ' par la structure de Poisson-Nijenhuis homogène $(\tilde{\Lambda}'_0, \tilde{N}', \tilde{T}')$ de $\tilde{M}'$, (cf. Proposition 5.2). En développant le même raisonnement que celui dans le paragraphe 10, on obtient que, dans le cas étudié,

$$\begin{aligned}
\Lambda'_{0\Sigma'} &= -\frac{3}{2}\left[\sum_{k=2}^{r_1} \tilde{x}'^1_{2k-1}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^1_{2k-1}} + \sum_{i=2}^{m}\left(\sum_{k=1}^{r_i} \tilde{x}'^i_{2k-1}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^i_{2k-1}}\right)\right] \wedge \frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^1_2} + \\
&+ \sum_{k=2}^{r_1} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^1_{2k-1}} \wedge \frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^1_{2k}} + \sum_{i=2}^{m}\left(\sum_{k=1}^{r_i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^i_{2k-1}} \wedge \frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^i_{2k}}\right),
\end{aligned} \tag{124}$$

$$E'_{0\Sigma'} = \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^1_2}, \tag{125}$$

$$N'_{\Sigma'} = -(\tilde{y}' + \tilde{a}')Id_{\Sigma'} - \frac{3}{2}T'_{\Sigma'} \otimes d\tilde{x}'^1_3 + H'_{\Sigma'} + (\frac{3}{2}T'_{\Sigma'} - Z'_{\Sigma'}) \otimes d\tilde{y}', \tag{126}$$

où $-\frac{3}{2}T'_{\Sigma'}$ est la projection de $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^1_1}|_{\Sigma'}$ sur $T\Sigma'$ parallèlement à $\tilde{T}'$,

$$T'_{\Sigma'} = \sum_{k=2}^{r_1} \tilde{x}'^1_{2k-1}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^1_{2k-1}} + \sum_{i=2}^{m}\left(\sum_{k=1}^{r_i} \tilde{x}'^i_{2k-1}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^i_{2k-1}}\right),$$

et $H'_{\Sigma'}$ et $Z'_{\Sigma'}$ ont, respectivement, les expressions (107) et (109),

$$\begin{aligned}
Y'_{\Sigma'} &= \sum_{k=2}^{r_1-1} (\tilde{x}'^1_{2k+1} - \frac{3}{2}\tilde{x}'^1_3\tilde{x}'^1_{2k-1})\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^1_{2k-1}} - \frac{3}{2}\tilde{x}'^1_3\tilde{x}'^1_{2r_1-1}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^1_{2r_1-1}} + \\
&+ \sum_{i=2}^{m}\left[\sum_{k=1}^{r_i-1} (\tilde{x}'^i_{2k+1} - \frac{3}{2}\tilde{x}'^1_3\tilde{x}'^i_{2k-1})\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^i_{2k-1}}\right] - \sum_{i=2}^{m} \frac{3}{2}\tilde{x}'^1_3\tilde{x}'^i_{2r_i-1}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}'^i_{2r_i-1}},
\end{aligned} \tag{127}$$

$$\gamma'_{\Sigma'} = \frac{3}{2}(d\tilde{x}'^1_3 - d\tilde{y}'), \tag{128}$$

$$g'_{\Sigma'} = -(\tilde{y}' + \tilde{a}') + \frac{3}{2}\tilde{x}'^1_3. \quad (129)$$

(Si $df(\tilde{p}') = 0$, les expressions locales obtenues des champs de tenseurs de la structure $((\Lambda'_{0\Sigma'}, E'_{0\Sigma'}), \mathcal{N}'_{\Sigma'})$ ne contiennent pas les coordonnées $\tilde{x}'^m_{2r_m}$ et $\tilde{y}'$.)

En continuant, on considère un système de coordonnées locales $\tilde{x}''$ de $\tilde{M}''$, centré en $\tilde{p}''$, (on note $\tilde{p}''$ la projection de $\tilde{p}$ sur $\tilde{M}''$), dans lequel $(\tilde{\Lambda}''_0, \tilde{N}'', \tilde{T}'')$ a l'expression de son modèle présenté par le Théorème 8.3, et le système produit $((\tilde{x}'^i_j), \tilde{y}'; \tilde{x}'')$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, 2r_i$, $r_1 \geq \ldots \geq r_m$, de $\tilde{M} = \tilde{M}' \times \tilde{M}''$, où $\tilde{y}' = f - \tilde{a}'$, $\tilde{a}' = f(\tilde{p}')$, centré en $\tilde{p} = (\tilde{p}', \tilde{p}'')$. En plus, on considère l'hypersurface $\Sigma = \Sigma' \times \tilde{M}''$ de $\tilde{M} = \tilde{M}' \times \tilde{M}''$ définie par

$$\tilde{x}'^1_1 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3},$$

qui, sans doute, est une sous-variété de $\tilde{M} = \tilde{M}' \times \tilde{M}''$, passant par $\tilde{p}$, de codimension 1 transverse en $\tilde{p}$ au champ d'homothéties $\tilde{T}' + \tilde{T}''$.

Soit $((\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma}), \mathcal{N}_\Sigma)$, $\mathcal{N}_\Sigma := (N_\Sigma, Y_\Sigma, \gamma_\Sigma, g_\Sigma)$, la structure de Jacobi-Nijenhuis induite sur $\Sigma = \Sigma' \times \tilde{M}''$ par la structure de Poisson-Nijenhuis homogène produit $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T}) = (\tilde{\Lambda}'_0, \tilde{N}', \tilde{T}') + (\tilde{\Lambda}''_0, \tilde{N}'', \tilde{T}'')$ de $\tilde{M} = \tilde{M}' \times \tilde{M}''$, (cf. Propositions 5.2 et 5.4). De la Proposition 5.4, on déduit les expressions (113)-(117) des champs de tenseurs de $((\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma}), \mathcal{N}_\Sigma)$. Étant connus les modèles locaux de $((\Lambda'_{0\Sigma'}, E'_{0\Sigma'}), \mathcal{N}'_{\Sigma'})$, $\mathcal{N}'_{\Sigma'} := (N'_{\Sigma'}, Y'_{\Sigma'}, \gamma'_{\Sigma'}, g'_{\Sigma'})$, dans les coordonnées construites $(\tilde{x}'^1_2, \ldots, \tilde{x}'^m_{2r_m}, \tilde{y}')$ de Σ', (cf. relations (124)-(129)), et de $(\tilde{\Lambda}''_0, \tilde{N}'', \tilde{T}'')$ dans le système considéré $\tilde{x}''$ de $\tilde{M}''$, (cf. Théorème 8.3), les formules (113)-(117) nous donnent l'écriture locale de $((\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma}), \mathcal{N}_\Sigma)$, $\mathcal{N}_\Sigma := (N_\Sigma, Y_\Sigma, \gamma_\Sigma, g_\Sigma)$, dans le système de coordonnées locales produit $(\tilde{x}'^1_2, \ldots, \tilde{x}'^m_{2r_m}, \tilde{y}'; \tilde{x}'')$ de $\Sigma = \Sigma' \times \tilde{M}''$.

Alors, nous sommes amenés au théorème suivant.

Théorème 11.1 *Soit $((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$, $\mathcal{N} := (N, Y, \gamma, g)$, une structure de Jacobi-Nijenhuis définie sur une variété différentiable M de dimension $2n$, et $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$ la structure de Poisson-Nijenhuis homogène associée sur $\tilde{M} = M \times \mathbf{R}$. On suppose que (Λ_0, E_0) est telle que, sa Poissonisation $\tilde{\Lambda}_0$ soit de rang maximum sur un ouvert dense de $\tilde{M} = M \times \mathbf{R}$. Soit p un point générique de M, vu comme projection sur M d'un point régulier $\tilde{p}$ de $\tilde{M}$ relativement à $\tilde{N}$, tel que corang $\tilde{\Lambda}_0(\tilde{p}) = 1$, et $\tilde{S}_0$ la feuille symplectique de $\tilde{\Lambda}_0$ qui passe par $\tilde{p}$. Soit, en plus, $(\tilde{M}', \tilde{\Lambda}'_0, \tilde{N}', \tilde{T}')$ le facteur de la "décomposition modèle" de $(\tilde{M}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$ de dimension impaire dont le champ d'homothéties $\tilde{T}'$ est supposé transverse en p à M, Σ une sous-variété de $\tilde{M}$, passant par $\tilde{p}$, de codimension 1 transverse à $\tilde{T}$, et $((\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma}), \mathcal{N}_\Sigma)$, $\mathcal{N}_\Sigma := (N_\Sigma, Y_\Sigma, \gamma_\Sigma, g_\Sigma)$, la structure de Jacobi-Nijenhuis induite sur Σ par $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$. Si $\tilde{T}$ est tangent à $\tilde{S}_0$, alors, il existe sur un voisinage de $\tilde{p}$ dans Σ un système de coordonnées locales de Σ, centré en $\tilde{p}$, dans lequel les champs de tenseurs de $(\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma})$ et de $\mathcal{N}_\Sigma := (N_\Sigma, Y_\Sigma, \gamma_\Sigma, g_\Sigma)$ ont, respectivement, les expressions (113) et (114)- (117) (compte tenu des formules (124)-(129)). La structure $((\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma}), \mathcal{N}_\Sigma)$ est localement équivalente à une structure conforme à $((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$.*

Étude du cas 2

On considère le facteur $(\tilde{M}'', \tilde{\Lambda}''_0, \tilde{N}'', \tilde{T}'')$ de la "décomposition modèle" de $(\tilde{M}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$ qui est une variété de Poisson-Nijenhuis symplectique homogène dont le champ d'homothéties $\tilde{T}''$ est supposé transverse en p à M. Soit $\tilde{p}''$ la projection de $\tilde{p}$ sur $\tilde{M}''$. D'après le

Théorème 8.3, au voisinage de $\tilde{p}''$, $(\tilde{M}'', \tilde{\Lambda}_0'', \tilde{N}'', \tilde{T}'')$ s'identifie à un produit fini de variétés de Poisson-Nijenhuis symplectiques homogènes dont l'opérateur de récursion a comme polynôme caractéristique une puissance d'un polynôme irréductible. $\tilde{T}''$ étant transverse en p à M, on a qu'au moins une des composantes de sa décomposition considérée est transverse en p à M.

Soit Σ'' une sous-variété de $\tilde{M}''$ de codimension 1 transverse à $\tilde{T}''$, qui passe par $\tilde{p}''$, et $((\Lambda''_{0\Sigma''}, E''_{0\Sigma''}), \mathcal{N}''_{\Sigma''})$, $\mathcal{N}''_{\Sigma''} := (N''_{\Sigma''}, Y''_{\Sigma''}, \gamma''_{\Sigma''}, g''_{\Sigma''})$, la structure de Jacobi-Nijenhuis induite sur Σ'' par la structure de Poisson-Nijenhuis symplectique homogène $(\tilde{\Lambda}_0'', \tilde{N}'', \tilde{T}'')$ de $\tilde{M}''$, (cf. Proposition 5.2). Le modèle local de $((\Lambda''_{0\Sigma''}, E''_{0\Sigma''}), \mathcal{N}''_{\Sigma''})$ est bien connu par le Théorème 10.1.

Maintenant, on considère la sous-variété $\Sigma = \tilde{M}' \times \Sigma''$ de $\tilde{M} = \tilde{M}' \times \tilde{M}''$ qui, bien entendu, est de codimension 1 et transverse à $\tilde{T}' + \tilde{T}''$. Soit $((\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma}), \mathcal{N}_\Sigma)$, $\mathcal{N}_\Sigma := (N_\Sigma, Y_\Sigma, \gamma_\Sigma, g_\Sigma)$, la structure de Jacobi-Nijenhuis induite sur $\Sigma = \tilde{M}' \times \Sigma''$ par la structure de Poisson-Nijenhuis homogène produit $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T}) = (\tilde{\Lambda}_0', \tilde{N}', \tilde{T}') + (\tilde{\Lambda}_0'', \tilde{N}'', \tilde{T}'')$ de $\tilde{M} = \tilde{M}' \times \tilde{M}''$, (cf. Propositions 5.2 et 5.4). D'après la Proposition 5.4,

$$\Lambda_{0\Sigma} = \tilde{\Lambda}_0' + \Lambda''_{0\Sigma''} - \tilde{T}' \wedge E''_{0\Sigma''} \quad \text{et} \quad E_{0\Sigma} = E''_{0\Sigma''}, \tag{130}$$

$$N_\Sigma = \tilde{N}' + N''_{\Sigma''} - \tilde{T}' \otimes \gamma''_{\Sigma''}, \tag{131}$$

$$Y_\Sigma = \left(\tilde{N}' - g''_{\Sigma''} Id_{T\tilde{M}'}\right) \tilde{T}' + Y''_{\Sigma''}, \tag{132}$$

$$\gamma_\Sigma = \gamma''_{\Sigma''}, \tag{133}$$

$$g_\Sigma = g''_{\Sigma''}. \tag{134}$$

Alors, si $\tilde{x}'$ est un système de coordonnées locales de $\tilde{M}'$, centré en $\tilde{p}'$, dans lequel les champs de tenseurs $\tilde{\Lambda}_0'$, $\tilde{N}'$ et $\tilde{T}'$ ont, respectivement, les écritures (80), (81) et (96), et si $\tilde{x}''_{\Sigma''}$ est un système de coordonnées locales de Σ'', centré en $\tilde{p}''$, dans lequel les champs de tenseurs de $((\Lambda''_{0\Sigma''}, E''_{0\Sigma''}), \mathcal{N}''_{\Sigma''})$, $\mathcal{N}''_{\Sigma''} := (N''_{\Sigma''}, Y''_{\Sigma''}, \gamma''_{\Sigma''}, g''_{\Sigma''})$, ont les expressions de leurs modèles (cf. Théorème 10.1), les formules (130) et (131)-(134) nous donnent l'expression locale de $((\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma}), \mathcal{N}_\Sigma)$, $\mathcal{N}_\Sigma := (N_\Sigma, Y_\Sigma, \gamma_\Sigma, g_\Sigma)$, dans le système de coordonnées locales produit $(\tilde{x}'; \tilde{x}''_{\Sigma''})$ de $\Sigma = \tilde{M}' \times \Sigma''$.

Ainsi, nous concluons le théorème suivant.

Théorème 11.2 *Soit $((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$, $\mathcal{N} := (N, Y, \gamma, g)$, une structure de Jacobi-Nijenhuis définie sur une variété différentiable M de dimension $2n$, et $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$ la structure de Poisson-Nijenhuis homogène associée sur $\tilde{M} = M \times \mathbf{R}$. On suppose que (Λ_0, E_0) est telle que, sa Poissonisation $\tilde{\Lambda}_0$ soit de rang maximum sur un ouvert dense de $\tilde{M} = M \times \mathbf{R}$. Soit p un point générique de M, vu comme projection sur M d'un point régulier $\tilde{p}$ de $\tilde{M}$ relativement à $\tilde{N}$, tel que corang $\tilde{\Lambda}_0(\tilde{p}) = 1$, et $\tilde{S}_0$ la feuille symplectique de $\tilde{\Lambda}_0$ qui passe par $\tilde{p}$. Soit, en plus, $(\tilde{M}'', \tilde{\Lambda}_0'', \tilde{N}'', \tilde{T}'')$ la variété de Poisson-Nijenhuis symplectique homogène de la "décomposition modèle" de $(\tilde{M}, \tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$ dont le champ d'homothéties $\tilde{T}''$ est supposé transverse en p à M, Σ une sous-variété de $\tilde{M}$, passant par $\tilde{p}$, de codimension 1 transverse à $\tilde{T}$, et $((\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma}), \mathcal{N}_\Sigma)$, $\mathcal{N}_\Sigma := (N_\Sigma, Y_\Sigma, \gamma_\Sigma, g_\Sigma)$, la structure de Jacobi-Nijenhuis induite sur Σ par $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{N}, \tilde{T})$. Si $\tilde{T}$ est tangent à $\tilde{S}_0$, alors, il existe sur un voisinage de $\tilde{p}$ dans Σ un système de coordonnées locales de Σ, centré en $\tilde{p}$, dans lequel les champs de tenseurs de $(\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma})$ et de $\mathcal{N}_\Sigma := (N_\Sigma, Y_\Sigma, \gamma_\Sigma, g_\Sigma)$ ont, respectivement, les expressions (130) et (131)-(134) (compte tenue de l'expression modèle de $((\Lambda''_{0\Sigma''}, E''_{0\Sigma''}), \mathcal{N}''_{\Sigma''})$ présentée par le Théorème 10.1). La structure $((\Lambda_{0\Sigma}, E_{0\Sigma}), \mathcal{N}_\Sigma)$ est localement équivalente à une structure conforme à $((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$.*

11.2 Étude du cas où $\frac{\partial}{\partial t}$ n'est pas tangent à $\tilde{S}_0$

Nous nous plaçons dans le contexte présenté au début de ce paragraphe, et nous supposons que le champ d'homothéties $\tilde{T} = \frac{\partial}{\partial t}$ de $(\tilde{\Lambda}_0, \tilde{N})$ n'est pas tangent à la feuille symplectique $\tilde{S}_0$ de $\tilde{\Lambda}_0$ qui passe par $\tilde{p}$. Comme nous avons remarqué, dans ce cas, (Λ_0, E_0) est transitive sur un voisinage U de p dans M. Alors, il existe une fonction différentiable f définie sur U, ne s'annulant en aucun point de U, telle que, la structure de Jacobi f-conforme à (Λ_0, E_0), notée (Λ_0^f, E_0^f), soit de Poisson symplectique sur U, i.e. $\Lambda_0^f = f\Lambda_0$ soit de Poisson non-dégénérée sur U et $E_0^f = \Lambda_0^{\#}(df) + fE_0 = 0$, (cf. [11], [2], [9]).

Soit $((\Lambda_0^f, E_0^f), \mathcal{N}^f)$, $\mathcal{N}^f := (N^f, Y^f, \gamma^f, g^f)$, la structure de Jacobi-Nijenhuis f-conforme à $((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$, et (Λ_1^f, E_1^f) la structure de Jacobi f-conforme à (Λ_1, E_1), $(\Lambda_1, E_1)^{\#} = \mathcal{N} \circ (\Lambda_0, E_0)^{\#}$. D'après la Proposition 5.1,

$$(\Lambda_1^f, E_1^f)^{\#} = \mathcal{N}^f \circ (\Lambda_0^f, E_0^f)^{\#}.$$

Alors,

$$E_1^f = N^f E_0^f = 0,$$

(cf. relation (29)), fait qui signifie que $\Lambda_1^f = f\Lambda_1$ définit sur U une structure de Poisson. Sans doute, Λ_1^f est compatible avec Λ_0^f. Le champ de tenseurs Λ_0^f étant inversible sur U, le couple $(\Lambda_0^f, \Lambda_1^f)$ possède un opérateur de récursion sur U qui n'est autre que le champ de tenseurs de type (1,1)

$$N^f = N - Y \otimes \frac{df}{f}$$

de $\mathcal{N}^f := (N^f, Y^f, \gamma^f, g^f)$. Alors, (Λ_0^f, N^f) définit sur U une structure de Poisson-Nijenhuis symplectique.

Proposition 11.1 *Soit $((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$, $\mathcal{N} := (N, Y, \gamma, g)$, une structure de Jacobi-Nijenhuis transitive définie sur une variété différentiable M de dimension $2n$, et p un point générique de M. Alors, il existe sur un voisinage U de p dans M une fonction différentiable f, ne s'annulant pas sur U, telle que, la structure de Jacobi (Λ_0^f, E_0^f) définissant la structure de Jacobi-Nijenhuis f-conforme $((\Lambda_0^f, E_0^f), \mathcal{N}^f)$, $\mathcal{N}^f := (N^f, Y^f, \gamma^f, g^f)$, à $((\Lambda_0, E_0), \mathcal{N})$, $\mathcal{N} := (N, Y, \gamma, g)$, soit de Poisson non-dégénérée sur U, et le champ de tenseurs N^f de type (1,1) de $\mathcal{N}^f$ soit un tenseur de Nijenhuis compatible avec Λ_0^f sur U.*

Bien entendu, le modèle local de (Λ_0^f, N^f) est connu par le Théorème 8.3. D'autre part, puisque $((\Lambda_0^f, E_0^f), \mathcal{N}^f)$, $\mathcal{N}^f := (N^f, Y^f, \gamma^f, g^f)$, est de Jacobi-Nijenhuis, (cf. Proposition 5.1), ses champs de tenseurs vérifient les relations (19)-(22) et (25)-(27). Étant $E_0^f = 0$ et Λ_0^f non-dégénéré sur U, de la relation

$$N^f E_0^f = \Lambda_0^{f\#}(\gamma^f) + g^f E_0^f,$$

il découle que $\gamma^f = 0$ sur U. Alors, (cf. Proposition 5.1),

$$\gamma = -\ {}^tN\frac{df}{f} + g^f\frac{df}{f}. \tag{135}$$

Compte tenu de ce résultat, de la relation

$${}^tN^f(dg^f) = L_{Y^f}\gamma^f + g^f dg^f,$$

il vient que g^f est une valeur propre fonctionnelle de N^f ou que g^f est une constante sur U. Donc, si s est un système de coordonnées locales de M, centré en p, dans lequel (Λ_0^f, N^f) a l'expression de son modèle, (cf. Théorème 8.3), à partir de celle-ci nous déduisons facilement les écritures locales des Λ_0, $E_0 = -\Lambda_0^{\#}(\frac{df}{f})$, N, Y et g dans ce système et, d'après la relation (135), celle de γ.

References

[1] P. Dazord, Feuilletages à singularités, Indagationes Mathematicae 47 (1985) 21-39.

[2] P. Dazord, A. Lichnerowicz et C.-M. Marle, Structure locale des variétés de Jacobi, J. Math. Pures Appl. 70 (1991) 101-152.

[3] F. Guédira et A. Lichnerowicz, Géométrie des algèbres de Lie de Kirillov, J. Math. Pures Appl. 63 (1984) 407-484.

[4] Y. Kerbrat et Z. Souici-Benhammadi, Variétés de Jacobi et groupoïdes de contact, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 317 (1993) 81-86.

[5] A. Kirillov, Local Lie algebras, Russian Math. Surveys 31 (1976) 55-75.

[6] Y. Kosmann-Schwarzbach and F. Magri, Poisson-Nijenhuis structures, Ann. I.H.P. 53 (1990) 35-81.

[7] Y. Kosmann-Schwarzbach, The Lie Bialgebroid of a Poisson-Nijenhuis Manifold, Lett. in Math. Phys. 38 (1996) 421-428.

[8] J.-L. Koszul, Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie, dans : *Élie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui*, Astérisque, numéro hors série (1985) 257-271.

[9] P. Libermann and C.-M. Marle, *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.

[10] A. Lichnerowicz, Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, J. Differential Geom. 12 (1977) 253-300.

[11] A. Lichnerowicz, Les variétés de Jacobi et leurs algèbres de Lie associées, J. Math. Pures Appl. 57 (1978) 453-488.

[12] A. Lichnerowicz, Dérivations d'algèbres de Lie attachées à une algèbre de Lie locale de Kirillov, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 297 (1983) 261-266.

[13] F. Magri, A simple model of the integrable Hamiltonian equation, J. Math. Phys. 19 (1978) 1156-1162.

[14] F. Magri and C. Morosi, A geometric characterization of integrable Hamiltonian systems through the theory of Poisson-Nijenhuis manifolds, Università di Milano, Quaderno S 19, 1984.

[15] C.-M. Marle, Quelques propriétés des variétés de Jacobi, dans : *Géométrie symplectique et mécanique*, Séminaire sud-rhodanien de géométrie, J.-P. Dufour (éd.), (Travaux en cours, Hermann, Paris 1985) 125-139.

[16] C.-M. Marle, *Variétés symplectiques et variétés de Poisson*, Cours de DEA, Université Pierre et Marie Curie, 1998-1999, (http ://www.math.jussieu.fr/∼marle).

[17] J. C. Marrero, J. Monterde, E. Padron, Jacobi-Nijenhuis manifolds and compatible Jacobi structures, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 329 (1999) 797-802.

[18] J. M. Nunes da Costa and C.-M. Marle, Reduction of bihamiltonian manifolds and recursion operators, dans : *Proc. Conf. Diff. Geometry and Appl.* (Brno 1995), Masaryk, Univ. Brno, 1996, 523-538.

[19] J. M. Nunes da Costa, Compatible Jacobi manifolds : geometry and reduction, J. Phys. A : Math. Gen. 31 (1998) 1025-1033.

[20] J. M. Nunes da Costa, Some remarks on the Poisson-Nijenhuis and the Jacobi structures, dans : *Proc. Summer School on Diff. Geometry* (Coimbra 1999) 109-117.

[21] F. Petalidou, Étude locale de structures bihamiltoniennes, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1998.

[22] F. Petalidou, Sur la symplectisation de structures bihamiltoniennes, Bull. Sci. Math. 124 (2000) 255-286.

[23] F. Petalidou, Modèles locaux de structures de Poisson-Nijenhuis en dimension impaire, dans : *Proc. Summer School on Diff. Geometry* (Coimbra 1999) 127-147.

[24] H. Samelson, *An Introduction to Linear Algebra*, Ed. John Wiley and Sons, 1974.

[25] J. A. Schouten, On the differential operators of the first order in tensor calculus, in *Convegno Int. Geom. Diff.* (Italia 1953) Ed. Cremonese (Roma 1954) 1-7.

[26] F. J. Turiel, Classification locale simultanée de deux formes symplectiques compatibles, Manuscripta Math. 82 (1994) 349-362.

[27] I. Vaisman, *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*, Progress in Mathematics, Vol. 118, Birkhaüser, Basel, 1994.

[28] I. Vaisman, Reduction of Poisson-Nijenhuis manifolds, J. Geom. Phys. 19 (1996) 90-98.