

1 2 9 0



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Afonso Frias Vazão do Nascimento Costa

**PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM
MATERIAIS VISCOELÁSTICOS:
ESTUDO ANALÍTICO E NUMÉRICO**

VOLUME 1

Dissertação no âmbito do Mestrado em Matemática, Ramo Análise Aplicada e Computação orientada pelo Professor Doutor José Augusto Ferreira e apresentada ao Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia.

junho de 2022

**PROPAGAÇÃO DE ONDAS
EM MATERIAIS VISCOELÁSTICOS:
ESTUDO ANALÍTICO E NUMÉRICO**

Afonso Frias Vazão do Nascimento Costa



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Mestrado em Matemática

Master in Mathematics

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

junho de 2022

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que me ajudaram a terminar esta etapa.

Começando por agradecer ao meu orientador, Professor Doutor José Augusto Ferreira, por todo o apoio, especialmente durante este ano, contribuiu largamente para o meu desenvolvimento com a sua orientação, mas também dando-me alguma liberdade para trabalho independente. Obrigado por tudo, professor!

Gostaria também de agradecer a todos os professores que me permitiram estar preparado para concluir este trabalho, por toda a atenção e por todos os conselhos.

Aos meus pais, preciso agradecer por tudo, por todo apoio financeiro e emocional e por sempre acreditarem em mim e me incentivarem a ir mais longe. Sem eles este mestrado nunca seria possível.

Quero também agradecer a todos os amigos que fiz em Coimbra, por todas as horas de convívio, estudo e trabalho ao longo destes 5 anos, por todo o apoio nos maus momentos e também nos momentos mais engraçados. Especial agradecimento aos que começaram esta aventura comigo, Bibiana, Carolina, David, Diana, Duarte, Hugo e Marta sem vocês nada disto tinha sido possível. Outro agradecimento especial à minha família de praxe e ainda à Inês, Taís, Russo e Henrique por me acompanharem nas minhas aventuras e me incentivarem a prosseguir-las por mais malucas que fossem.

Não posso deixar de agradecer aos meus amigos das Caldas porque são velhos amigos que ainda estão presentes mesmo ficando meses sem os ver. Aqueles momentos de fim de semana, seja um café ou uma saída, são uma pausa valiosa para as semanas seguintes.

Um grande obrigado a todos os que contribuíram para que esta aventura se concretizasse e finalizasse da melhor forma.

Resumo

Nesta dissertação é estudado um problema de condições de fronteira e iniciais que descreve o deslocamento de uma onda num meio viscoelástico obtido considerando que a relação funcional entre a tensão e a deformação do meio é caracterizada pelo modelo de Kelvin-Voigt. Para o problema de condições iniciais e de fronteira, são estabelecidos resultados de existência considerando o método de separação de variáveis e de unicidade e estabilidade recorrendo ao método de energia.

Do ponto de vista numérico, nesta dissertação é proposto um método numérico pertencente à família dos métodos de diferenças finitas. O estudo deste método é feito em duas fases distintas: numa primeira fase estuda-se a aproximação semi-discreta definida sobre uma partição não uniforme e, posteriormente, estuda-se o métodos completamente discreto conjugando a discretização espacial já considerada com uma integração temporal definida a partir de uma partição uniforme.

Num contexto funcional adequado, provou-se que, relativamente a uma norma discreta que pode ser vista como uma discretização da norma usual de H^1 , ambos os métodos têm convergência espacial quadrática e, no caso do método discreto, a convergência no tempo é de 1ª ordem. Mais, com auxílio do programa *Matlab*, são incluídos exemplos numéricos que ilustram os resultados de convergência estabelecidos, bem como o comportamento qualitativos do modelo estudado, utilizando valores reais de propriedades físicas encontradas nos tecidos de um fígado humano.

“ Mathematical analysis is as extensive as nature itself; it defines all perceptible relations, measures times, spaces, forces, temperatures; this difficult science is formed slowly, but it preserves every principle which it has once acquired; it grows and strengthens itself incessantly in the midst of the many variations and errors of the human mind. It’s chief attribute is clearness; it has no marks to express confused notations. It brings together phenomena the most diverse, and discovers the hidden analogies which unite them. ”

Joseph Fourier

Índice

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
1.1 Problema em estudo	1
1.2 Dedução da equação da onda visco-elástica	3
1.3 Breve descrição do conteúdo	5
2 Existência e regularidade de solução	7
2.1 Construção da solução candidata	7
2.2 Existência de solução	11
2.3 Princípio de conservação de energia	15
2.4 Estabilidade e unicidade de solução	16
3 Método Numérico semi-discreto	19
3.1 Resultados auxiliares e notações	19
3.2 Existência de solução	21
3.3 Estabilidade e unicidade de solução	23
3.4 Convergência	25
4 Método numérico discreto no espaço e no tempo	29
4.1 Notações e resultados auxiliares	29
4.2 Existência de solução	31
4.3 Estabilidade	31
4.4 Convergência	33
5 Simulação numérica	37
5.1 Convergência	37
5.2 Comportamento qualitativo	39
6 Conclusão	43
Bibliografia	45

Anexo A Código Matlab

47

Lista de Figuras

5.1	Gráfico da solução exata (- - -) e solução numérica (—) para cada malha não uniforme espacial	38
5.2	Gráfico da solução numérica para cada velocidade inicial	40
5.3	Gráfico da solução numérica para $T = 4, 6, 7, 10, 13 s$	40
5.4	Gráfico da solução numérica para $\rho = 1000, 1025, 1050, 1075, 1100 Kg/m^3$	41
5.5	Gráfico da solução numérica para $\alpha_1 = 1950, 2000, 2060, 2100, 2150 Pa$	41
5.6	Gráfico da solução numérica para $\alpha_2 = 0.50, 1.00, 1.72, 2.50, 3.00 Pa \cdot s$	42

Lista de Tabelas

5.1	Parâmetros para o estudo da convergência	38
5.2	Ordem de convergência obtida numericamente	39
5.3	Parâmetros para o estudo do comportamento qualitativo	39

Capítulo 1

Introdução

1.1 Problema em estudo

O objetivo central deste trabalho é o estudo do problema de condições de fronteira e iniciais

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}, & (x, t) \in (0, a) \times \mathbb{R}^+ \\ u(0, t) = u(a, t) = 0, & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in (0, a) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), & x \in (0, a), \end{cases} \quad (1.1)$$

em que ρ e $\alpha_i, i = 1, 2$, representam constantes positivas e ϕ e ψ são funções que, por exemplo, no contexto da propagação de uma onda, definem a posição e velocidade inicial, respetivamente. Pretende-se estabelecer que, sob condições de regularidade adequadas para ϕ e ψ , o problema diferencial (1.1) tem solução única e é estável, isto é, (1.1) é bem posto no sentido de Hadamard.

O problema anterior surge em vários contextos. Está-se particularmente interessado na utilização do sistema anterior no contexto da propagação de ondas em materiais viscoelásticos. De facto, a equação diferencial de derivadas parciais em (1.1) é uma generalização da equação diferencial

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\mu + \eta \frac{\partial}{\partial t}) \Delta u + (\lambda + \mu + \xi \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial t}) \nabla(\nabla \cdot u), \quad (1.2)$$

definida em $\Omega \times \mathbb{R}^+$, em que u representa um deslocamento, Ω representa um domínio espacial (no caso em estudo tomou-se, sem perda de generalidade, $\Omega = (0, a)$), λ e μ representam o primeiro e segundo coeficiente de Lamé, e η e ξ representam o primeiro e segundo parâmetro de viscosidade. De facto, é suficiente considerar $\alpha_1 = 2\mu + \lambda$ e $\alpha_2 = \eta + \xi + \frac{\mu}{3}$. Esta equação foi proposta em [12] para descrever o deslocamento num tecido sob a ação da propagação de uma onda de pressão gerada por um ultrassom (som com frequência superior à frequência do som que se consegue ouvir, ou seja, superior a 20kHz).

A aplicação médica mais comum do ultrassom é em diagnóstico. De facto, os ultrassons são utilizados por exemplo nas ecografias também conhecidas por ultrassonografias. Recentemente, os ultrassons têm tido utilização na entrega de fármacos [1, 3, 11]. Neste contexto, o ultrassom gera uma

onda de pressão que ao propagar-se num tecido provoca um conjunto de alterações que facilitam o transporte das moléculas de fármaco.

O transporte de um fármaco num tecido é usualmente descrito por uma equação de difusão estabelecida a partir da tradicional lei de Fick para a concentração. O estudo da propagação das moléculas de fármaco num tecido sob a ação de um ultrassom foi considerado em [9, 12]. Neste trabalho, os autores consideram que a onda de pressão acústica gerada pelo ultrassom induz um aumento da temperatura e, por outro lado, um aumento do transporte convectivo do fármaco. É de salientar que o transporte difusivo do fármaco é também estimulado pelo aumento da temperatura. Os autores consideram o seguinte sistema diferencial

$$a \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + b \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot (E \nabla p) + f_3, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (D_T(T) \nabla T) + kT + f_2(p), \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (v_p(p, \nabla p) c) - \nabla \cdot (D_c(p, T) \nabla c) = f_1, \quad (1.5)$$

definido em $\Omega \times \mathbb{R}^+$, em que p representa a intensidade da pressão acústica, T denota a temperatura e c a concentração de fármaco. Em (1.3), a e b denotam parâmetros associados ao meio, f_3 representa o termo fonte que gera o onda de pressão acústica. Em (1.4), $D_T(T)$ denota o coeficiente de difusão, $f_2(p)$ representa o termo reativo induzido pela pressão acústica, o termo kT representa o termo fonte associado à transferência da temperatura a partir da corrente sanguínea. Em (1.5), v_p denota a velocidade convectiva que os autores assumem depender eventualmente da intensidade da pressão acústica e do seu gradiente, e o coeficiente de difusão $D_c(p, T)$ é considerado dependente da pressão acústica e da temperatura, f_1 representa um termo fonte associado, por exemplo, à degradação/consumo do fármaco.

O sistema (1.3), (1.4), (1.5) é complementado com as condições iniciais em Ω ,

$$p(x, 0) = p_0(x), \quad \frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = p_{v,0}(x), \quad (1.6)$$

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad (1.7)$$

$$c(x, 0) = c_0(x), \quad (1.8)$$

e as condições de fronteira de Dirichlet definidas em $\partial\Omega \times \mathbb{R}^+$

$$p(x, t) = 0, \quad (1.9)$$

$$T(x, t) = 0, \quad (1.10)$$

$$c(x, t) = 0. \quad (1.11)$$

As condições de fronteira anteriores têm significado no pressuposto de que o domínio espacial é suficientemente extenso para estas não tenham influência no domínio espacial onde está a ocorrer o fenómeno.

A equação (1.3) para a intensidade da onda de pressão acústica é uma generalização da equação

$$\frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\tilde{a}}{v_s^2} \frac{\partial p}{\partial t} = \rho \nabla \cdot (\rho \nabla p), \quad (1.12)$$

em que ρ representa a densidade do tecido, v_s representa a velocidade do som, $\tilde{a} = a \sqrt{\frac{a^4 v_s^4}{4\pi^2 f^2} + v_s^2}$ com a o coeficiente de atenuação do material e f a frequência da onda sonora, proposta em [13].

Em alternativa à equação (1.12), em [13] foi considerada a equação de terceira ordem

$$\frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\delta}{v_s^4} \frac{\partial p^3}{\partial t^3} - \frac{\beta_n}{2\rho v_s^4} \frac{\partial p^2}{\partial t^2} = \rho \nabla \cdot (\rho \nabla p), \quad (1.13)$$

em que δ representa a difusividade acústica num fluido termoviscoso e β_n representa um coeficiente não linear do meio.

Salienta-se que num futuro próximo pretende-se estudar o sistema diferencial definido por (1.1) e uma equação para a concentração do tipo da equação (1.5) não considerando o efeito da temperatura.

Neste trabalho pretende-se ainda propor um método numérico da família dos métodos de diferenças finitas que permite obter aproximações para a solução do problema de condições de fronteira e iniciais. Para o efeito considera-se inicialmente apenas a discretização espacial do problema e, posteriormente, a discretização temporal, introduzindo, deste modo, um sistema de diferenças finitas que substitui o problema (1.1). Consideram-se malhas espaciais não uniformes, malhas temporais uniformes e operadores de diferenças centradas de 2ª ordem e backward de 1ª ordem para aproximar as derivadas do problema (1.1), respetivamente.

Observa-se que o método que será objeto de estudo pode também ser visto como um método de elementos finitos segmentado linear completamente discreto no espaço.

É de salientar que o erro de truncatura induzido pela discretização espacial considerada é apenas de 1ª ordem relativamente à norma $\|\cdot\|_\infty$. No entanto, prova-se que o método apresenta um erro de discretização espacial de 2ª ordem relativamente a uma norma discreta que pode ser vista como uma discretização da norma usual de H^1 .

Métodos com ordem de convergência superior à ordem do erro de truncatura são designados métodos supraconvergentes. O estudo de métodos supraconvergentes surgiu na literatura na década de 80 do século passado e são inúmeras as referências que podemos encontrar. Salienta-se a título ilustrativo os trabalhos [2, 8, 10] e as suas referências. O estudo que é apresentado considera que a solução do problema em estudo tem derivadas de quinta ordem limitadas em $[0, a] \times [0, T]$, em que $T > 0$.

1.2 Dedução da equação da onda visco-elástica

Nesta secção pretende-se estabelecer a equação (1.1). Para o efeito considera-se um cubo viscoelástico com densidade ρ e com dimensões dx , dy e dz . Seja F uma força aplicada no cubo,

apenas com componente não nula relativamente ao eixo das abcissas. Para $x \in [0, dx]$, seja $u(x, t)$ o deslocamento dos pontos (x, y, z) , $y \in [0, dy]$, $z \in [0, dz]$, no instante t . Considera-se que a força gravitacional é negligenciável. Então, pela segunda lei de Newton, a aceleração do corpo é igual ao produto da sua massa pela força resultante das forças aplicadas, vem

$$dF = (\rho dx dy dz) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi, t), \quad (1.14)$$

em que $\xi \in [0, dx]$, $F = dF e_1$ e $\{e_1, e_2, e_3\}$ denota a base canónica de \mathbb{R}^3 .

Seja $\sigma(x, t)$ a tensão exercida nos pontos (x, y, z) , $y \in [0, dy]$, $z \in [0, dz]$ no instante t . A tensão num ponto do cubo é dada pela força de resistência nesse ponto, por unidade de área, induzida pela força aplicada. Assim,

$$dF = [\sigma(x + dx) - \sigma(x)] dy dz. \quad (1.15)$$

De (1.14) e (3.13) vem

$$[\sigma(x + dx) - \sigma(x)] dy dz = (\rho dx dy dz) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi, t),$$

e, conseqüentemente, obtém-se

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} \simeq \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.16)$$

Seja $\varepsilon(x, t)$ a deformação que ocorre nos pontos de abcissa x e que é definida por

$$\varepsilon(x) = \frac{u(x + dx) - u(x)}{dx}, \quad (1.17)$$

assim

$$\varepsilon(x) \simeq \frac{\partial u}{\partial x}(x, t). \quad (1.18)$$

Os materiais viscoelásticos são caracterizados por relações funcionais entre a tensão σ e a deformação ε que dependem das suas propriedades [15, 16]. Os modelos mais simples que se considera são o modelo the Maxwell e o modelo de Kelvin, também conhecido por modelo de Kelvin-Voigt, que são caracterizados pelas seguintes relações funcionais [5]

- Maxwell

$$\sigma + \frac{\mu}{E} \frac{d\sigma}{dt} = \mu \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (1.19)$$

- Kelvin

$$\sigma = E\varepsilon + \mu \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (1.20)$$

Nas relações funcionais anteriores, E representa o módulo de Young e μ o coeficiente de viscosidade. Os primeiros termos representam a resposta elástica e os segundos termos representam o comportamento viscoso.

De (1.19) vem

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\mu}{E} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial t} = \mu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial t}. \quad (1.21)$$

Considerando agora (1.16), (1.18) e (1.21), obtém-se a equação diferencial de derivadas parciais para o deslocamento

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\mu}{E} \rho \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}. \quad (1.22)$$

No caso particular de σ e ε estarem relacionados pelo modelo de Kelvin, então, de (1.20), vem

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = E \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial t}, \quad (1.23)$$

e, de (1.16), (1.18) e (1.23), obtém-se finalmente

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}, \quad (1.24)$$

que coincide com a equação diferencial de derivadas parciais de (1.1). Assim, conclui-se que o problema de condições iniciais e de fronteira (1.1) que é objecto de estudo neste trabalho pode ser utilizado para descrever o deslocamento de um material viscoelástico em que a tensão e a deformação são descritos pelo modelo de Kelvin (1.20).

1.3 Breve descrição do conteúdo

Como foi referido anteriormente, neste trabalho pretende-se estabelecer condições sobre as funções que definem as condições iniciais que permitem concluir que o problema (1.1) é bem posto no sentido de *Hadamard*. No Capítulo 2 é objeto de estudo resultados de existência, unicidade e estabilidade para (1.1). A existência de solução é estabelecida utilizando o método de separação de variáveis e a unicidade e estabilidade são estabelecidas através do método de energia

Do ponto de vista numérico, no Capítulo 3 é introduzido um método semi-discreto que se obtém discretizando as derivadas parciais espaciais da equação diferencial de (1.1) utilizando operadores de diferenças finitas. A aproximação semi-discreta definida deste modo é solução de um problema de condições iniciais cujas propriedades são estudadas neste capítulo. Provam-se resultados de existência, unicidade, estabilidade e convergência para esta aproximação. No que diz respeito à convergência, provou-se que o erro de semi-discretização espacial é de 2ª ordem, relativamente a uma norma discreta que pode ser vista como uma versão discreta da norma usual em H^1 , embora o erro de truncatura espacial seja apenas de 1ª ordem relativamente à norma $\|\cdot\|_\infty$. Na prova dos resultados aqui estabelecidos têm um papel relevante os conceitos e resultados estabelecidos para espaços de funções de rede.

No Capítulo 4 é proposto um método de discretização completa e são obtidos resultados de estabilidade e convergência que estendem de forma natural os resultados obtidos no capítulo anterior.

No Capítulo 5 pretende-se ilustrar os resultados teóricos de convergência estabelecidos anteriormente, além disso ilustra-se o comportamento qualitativo do sistema (1.1) usando como referência dados conhecidos de propriedades físicas dos tecidos do fígado humano.

Por último, no Capítulo 6 apresentam-se algumas conclusões.

Capítulo 2

Existência e regularidade de solução

O objetivo central deste capítulo é a construção de uma solução utilizando o método de separação de variáveis para o problema diferencial (1.1) e, posteriormente, analisar as condições de regularidade e estabilidade que conduzem naturalmente para a existência e unicidade da solução.

2.1 Construção da solução candidata

A primeira questão que se coloca diz respeito ao conceito de solução. Sejam $m, p \in \mathbb{N}_0$, por $C^{m,p}((0, a) \times \mathbb{R}^+)$ denota-se o espaço das funções contínuas com derivadas parciais contínuas em relação à variável x até à ordem m , e, em relação à variável t , até à ordem p .

Definição 2.1. Uma função $u : [0, a] \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se solução de (1.1) se:

1. $u \in C^{2,2}((0, a) \times \mathbb{R}^+) \cap C^{0,1}((0, a) \times \mathbb{R}_0^+) \cap C^{0,0}([0, a] \times \mathbb{R}^+)$ e existe $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}$ contínua em $(0, a) \times \mathbb{R}^+$,
2. u verifica a EDP e as condições iniciais e de fronteira de (1.1).

Na construção da solução utiliza-se o método de separação de variáveis. Para o efeito, supõem-se que u admite a seguinte fatorização

$$u_n(x, t) = M_n(x)N_n(t), \quad x \in (0, a), \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.1)$$

Conjugando (2.1) com a equação de derivadas parciais de (1.1), vem

$$\rho M_n(x)N_n''(t) = M_n''(x)(\alpha_1 N_n(t) + \alpha_2 N_n'(t)), \quad x \in (0, a), \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.2)$$

Admita-se agora que $u_n(x, t) \neq 0$. Então, de (2.2), obtém-se

$$\frac{M_n''(x)}{M_n(x)} = \lambda_n = \frac{\rho N_n''(t)}{\alpha_1 N_n(t) + \alpha_2 N_n'(t)}, \quad x \in (0, a), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Uma vez que as variáveis espacial e temporal são independentes, então existe uma constante λ_n tal que

$$M_n''(x) = \lambda_n M_n(x), \quad x \in (0, a), \quad (2.3)$$

e

$$\rho N_n''(t) = \lambda_n \alpha_1 N_n(t) + \lambda_n \alpha_2 N_n'(t), \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.4)$$

Das condições de fronteira de (1.1) deduz-se $M_n(0) = M_n(a) = 0$. Deste modo, conclui-se para M_n o seguinte problema de valores próprios

$$\begin{cases} M_n''(x) = \lambda_n M_n(x), & x \in (0, a), \\ M_n(0) = M_n(a) = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Discute-se seguidamente o sinal de λ_n :

- $\lambda_n > 0$

De (2.3) obtém-se

$$M_n(x) = A_n e^{\sqrt{\lambda_n} x} + B_n e^{-\sqrt{\lambda_n} x}, \quad x \in (0, a),$$

e, pelas condições de fronteira, conclui-se $M_n(x) = 0$, $x \in [0, a]$ e $\lambda_n = 0$ o que leva à solução nula.

- $\lambda_n = 0$

De (2.3) vem

$$M_n(x) = A_n x + B_n, \quad x \in (0, a)$$

e, atendendo a que $M_n(0) = 0$ e $M_n(a) = 0$, é-se conduzido também à solução nula.

- $\lambda_n < 0$

Considere-se $\lambda_n = -\beta_n^2 < 0$. Neste caso $M_n(x)$ admite a expressão

$$M_n(x) = \gamma_1 w(x) + \gamma_2 v(x), \quad x \in (0, a),$$

em que

$$\begin{cases} v'' = -\beta_n^2 v, \\ v(0) = 1 \\ v'(0) = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} w'' = -\beta_n^2 w, \\ w(0) = 0 \\ w'(0) = 1. \end{cases}$$

Uma vez que $\gamma_1 = 1$ e $\gamma_2 = 0$, logo $M_n(x) = w(x)$ e, portanto,

$$M_n(x) = A_n \sin(\beta_n x) + B_n \cos(\beta_n x), \quad x \in (0, a).$$

Atendendo a que $M_n(0) = 0$, $M_n(a) = 0$ e $M_n'(0) = 1$, vem finalmente

$$M_n(x) = \frac{1}{\beta_n} \sin(\beta_n x), \quad x \in (0, a) \quad \text{com} \quad \beta_n = \frac{n\pi}{a}.$$

Considera-se agora a determinação da solução da equação diferencial (2.4). O polinómio característico associado à equação anterior tem os dois zeros seguintes

$$y_n = -\frac{\beta_n^2 \alpha_2}{2\rho} \pm \frac{\beta_n \sqrt{\beta_n^2 \alpha_2^2 - 4\alpha_1 \rho}}{2\rho} = R_n \pm I_n. \quad (2.6)$$

Nota-se que caso

$$\beta_n^2 \alpha_2^2 - 4\alpha_1 \rho \geq 0,$$

tem-se $y_n \in \mathbb{R}$ e, caso contrário, $y_n \in \mathbb{C}$. A primeira desigualdade ocorre para $n \in \mathbb{R}$ tal que

$$n \geq \frac{2a\sqrt{\rho\alpha_1}}{\alpha_2\pi}.$$

Assim, conclui-se o seguinte:

- Se $n < \frac{2a\sqrt{\rho\alpha_1}}{\alpha_2\pi}$, então tem-se $y_n \in \mathbb{C}$ e, portanto,

$$N_n(t) = e^{R_n t} (A_n \sin(|I_n|t) + B_n \cos(|I_n|t)), \quad t \in \mathbb{R}^+;$$

- Se $n \geq \frac{2a\sqrt{\rho\alpha_1}}{\alpha_2\pi}$, então $y_n \in \mathbb{R}$ e, portanto,

$$N_n(t) = e^{R_n t} (C_n e^{I_n t} + D_n e^{-I_n t}), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Conclui-se assim a seguinte expressão para $u_n(x, t)$ em $(x, t) \in (0, a) \times \mathbb{R}^+$

$$u_n(x, t) = \begin{cases} \sin(\beta_n x) e^{R_n t} (A_n \sin(|I_n|t) + B_n \cos(|I_n|t)), & n < \frac{2a\sqrt{\rho\alpha_1}}{\alpha_2\pi} \\ \sin(\beta_n x) e^{R_n t} (C_n e^{I_n t} + D_n e^{-I_n t}), & n \geq \frac{2a\sqrt{\rho\alpha_1}}{\alpha_2\pi} \end{cases}, \quad (2.7)$$

em que A_n, B_n, C_n e D_n são constantes arbitrárias. Finalmente, a candidata a solução do problema inicial admite a seguinte representação

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x, t) = \\ & \sum_{n < \frac{2a\sqrt{\rho\alpha_1}}{\alpha_2\pi}} e^{R_n t} (A_n \sin(|I_n|t) + B_n \cos(|I_n|t)) \sin(\beta_n x) \\ & + \\ & \sum_{n \geq \frac{2a\sqrt{\rho\alpha_1}}{\alpha_2\pi}} e^{R_n t} (C_n e^{I_n t} + D_n e^{-I_n t}) \sin(\beta_n x), \end{aligned} \quad (2.8)$$

para $x \in [0, a], t \in \mathbb{R}_0^+$.

As constantes A_n, B_n, C_n, D_n são agora determinadas de modo a que u definida por (2.8) verifique as condições iniciais do problema (1.1). Introduce-se as seguintes notações

$$a_n(f) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos(\beta_n x) dx \text{ e } b_n(f) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin(\beta_n x) dx, n \in \mathbb{N}.$$

Uma vez que se pretende que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= u(x, 0) \\ &= \sum_{n < \frac{2a\sqrt{\rho\alpha_1}}{\alpha_2\pi}} B_n \sin(\beta_n x) + \sum_{n \geq \frac{2a\sqrt{\rho\alpha_1}}{\alpha_2\pi}} (C_n + D_n) \sin(\beta_n x) \end{aligned} \quad (2.9)$$

em que

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(\phi) \sin(\beta_n x), \quad (2.10)$$

é suficiente tomar

$$\begin{cases} B_n = b_n(\phi), & n < \frac{2a\sqrt{\rho\alpha_1}}{\alpha_2\pi} \\ C_n + D_n = b_n(\phi), & n \geq \frac{2a\sqrt{\rho\alpha_1}}{\alpha_2\pi}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Por outro lado, uma vez que se pretende que

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \\ &= \sum_{n < \frac{2a\sqrt{\rho\alpha_1}}{\alpha_2\pi}} (B_n R_n + A_n |I_n|) \sin(\beta_n x) + \sum_{n \geq \frac{2a\sqrt{\rho\alpha_1}}{\alpha_2\pi}} (R_n(C_n + D_n) + I_n(C_n - D_n)) \sin(\beta_n x), \end{aligned} \quad (2.12)$$

e, admitindo que

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(\psi) \sin(\beta_n x), \quad (2.13)$$

é suficiente tomar

$$\begin{cases} B_n R_n + A_n |I_n| = b_n(\psi), & n < \frac{2a\sqrt{\rho\alpha_1}}{\alpha_2\pi} \\ R_n(C_n + D_n) + I_n(C_n - D_n) = b_n(\psi), & n \geq \frac{2a\sqrt{\rho\alpha_1}}{\alpha_2\pi} \end{cases}. \quad (2.14)$$

Finalmente, de (2.11) e (2.14), vem

$$\begin{cases} A_n = \frac{1}{|I_n|} (b_n(\psi) - R_n b_n(\phi)), & n < \frac{2a\sqrt{\rho\alpha_1}}{\alpha_2\pi} \\ B_n = b_n(\phi) \\ C_n = \frac{1}{2I_n} ((I_n - R_n) b_n(\phi) + b_n(\psi)) \\ D_n = \frac{1}{2I_n} ((I_n + R_n) b_n(\phi) - b_n(\psi)) \end{cases}, \quad n \geq \frac{2a\sqrt{\rho\alpha_1}}{\alpha_2\pi}. \quad (2.15)$$

Em resumo, utilizando o método de separação de variáveis obteve-se a expressão candidata a solução do problema diferencial (1.1) e que é definida por (2.8) e (2.15). Observa-se que a solução encontrada é apenas formal. No resultado seguinte estabelecem-se condições suficiente para que a

série encontrada tenha por soma a função que é de facto solução do problema em estudo no sentido anteriormente introduzido.

2.2 Existência de solução

Proposição 2.1. *Sejam ϕ e ψ definidas em $[0, a]$ tais que*

- $\phi^{(i)}, i = 0, 1, 2, 3, 4$ contínuas em $[0, a]$, $\phi^{(5)} \in L^2(0, a)$,
- $\psi^{(i)}, i = 0, 1, 2$ contínuas em $[0, a]$, $\psi^{(3)} \in L^2(0, a)$
- $\phi(0) = \phi(a) = \phi''(0) = \phi''(a) = \phi^{(4)}(0) = \phi^{(4)}(a) = 0$,
- $\psi(0) = \psi(a) = \psi''(0) = \psi''(a) = 0$,

então a soma u da série (2.8) com os coeficientes (2.15) é solução do problema (1.1) de acordo com a Definição 2.1.

Dem: • Prove-se que a série definida por (2.8) e (2.15) tem por soma $u : [0, a] \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ contínua.

Para o efeito é suficiente provar que a série

$$\sum_{n \geq \frac{2a\sqrt{\rho\alpha_1}}{\alpha_2\pi}} u_n(x, t)$$

em que $u_n(x, t) = (C_n e^{(R_n + I_n)t} + D_n e^{(R_n - I_n)t}) \sin(\beta_n x)$, converge uniformemente em $[0, a] \times [0, T]$, para todo $T > 0$.

Note-se que

$$R_n \pm I_n = -\frac{\beta_n^2 \alpha_2}{2\rho} \pm \frac{\beta_n \sqrt{\beta_n^2 \alpha_2^2 - 4\alpha_1 \rho}}{2\rho} = -\frac{\beta_n^2 \alpha_2}{2\rho} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\alpha_1 \rho}{\beta_n^2 \alpha_2^2}}\right) < 0,$$

e, portanto,

$$|\sin(\beta_n x) e^{R_n t} (C_n e^{I_n t} + D_n e^{-I_n t})| \leq |C_n| + |D_n|, x \in [0, a], t \in [0, T].$$

Observa-se que existe uma constante positiva C , independente de n , tal que

$$|C_n| + |D_n| \leq C(|b_n(\phi)| + \frac{1}{n^2} |b_n(\psi)|).$$

Nota-se que

$$\frac{1}{n^2} |b_n(\psi)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^4} + b_n(\psi)^2 \right),$$

em que $\sum_n \frac{1}{n^4}$ é convergente e, uma vez que $\psi \in L^2(0, a)$, também se tem

$$\sum_n b_n(\psi)^2 \leq \|\psi\|_{L^2}^2,$$

em que $\|\cdot\|_{L^2}$ denota a norma usual em $L^2(0, a)$. Logo

$$\sum_n \frac{1}{n^2} |b_n(\psi)|$$

é convergente.

No que diz respeito à série de termo geral $|b_n(\phi)|$, observa-se que, de $\phi(0) = \phi(a) = 0$, vem

$$|b_n(\phi)| = \frac{a}{n\pi} |a_n(\phi')|.$$

Mais ainda, uma vez que

$$|b_n(\phi)| = \frac{a}{\pi} \frac{1}{n} |a_n(\phi')| \leq \frac{a}{2\pi} \left(\frac{1}{n^2} + a_n(\phi')^2 \right),$$

em que

$$\sum_n a_n(\phi')^2 \leq \|\phi'\|_{L^2}^2$$

conclui-se que $\sum_n |b_n(\phi)|$ é uma série convergente.

Estabelece-se deste modo que $\sum_n (|C_n| + |D_n|)$ é convergente e, pelo Critério de Weierstrass, vem finalmente que

$$\sum_n e^{R_n t} (C_n e^{I_n t} + D_n e^{-I_n t}) \sin(\beta_n x)$$

é uma série uniformemente convergente em $[0, a] \times [0, T]$.

- Existe $\frac{\partial u}{\partial t}$ e é contínua em $(0, a) \times \mathbb{R}_0^+$.

Para demonstrar a regularidade anterior, é suficiente mostrar a convergência uniforme da série

$$\sum_{n \geq \frac{2a\sqrt{\alpha_1 \rho}}{\alpha_2 \pi}} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t)$$

em $(0, a) \times [0, T]$, para $T > 0$. Nota-se que relativamente ao intervalo espacial, considera-se $[0, a]$ uma vez que os extremos do intervalo não vão influenciar o resultado.

Começa-se por observar que se tem

$$\left| \left(C_n (R_n + I_n) e^{(R_n + I_n)t} + D_n (R_n - I_n) e^{(R_n - I_n)t} \right) \sin(\beta_n x) \right| \leq (|R_n| + |I_n|)(|C_n| + |D_n|), \quad (2.16)$$

para $x \in [0, a], t \in [0, T]$, e

$$(|R_n| + |I_n|)(|C_n| + |D_n|) \leq C(n^2 |b_n(\phi)| + |b_n(\psi)|), \quad (2.17)$$

para alguma constante positiva C independente de n .

Atendendo a que $\phi''(0) = \phi''(a) = 0$, então pode-se demonstrar que se tem

$$|b_n(\phi)| = \frac{a^3}{(n\pi)^3} |a_n(\phi^{(3)})|.$$

Assim,

$$n^2 |b_n(\phi)| = \frac{a^3}{\pi^3} \frac{1}{n} |a_n(\phi^{(3)})| \leq \frac{a^3}{2\pi^3} \left(\frac{1}{n^2} + a_n(\phi^{(3)})^2 \right),$$

em que

$$\sum_n a_n(\phi^{(3)})^2 \leq \|\phi^{(3)}\|_{L^2}^2.$$

Logo $\sum_n n^2 |b_n(\phi)|$ é convergente.

Mais ainda, tendo em atenção que $\psi(0) = \psi(a) = 0$, vem

$$|b_n(\psi)| = \frac{a}{n\pi} |a_n(\psi')|.$$

Assim,

$$|b_n(\psi)| = \frac{a}{\pi} \frac{1}{n} |a_n(\psi')| \leq \frac{a}{2\pi} \left(\frac{1}{n^2} + a_n(\psi')^2 \right),$$

em que

$$\sum_n a_n(\psi')^2 \leq \|\psi'\|_{L^2}^2.$$

Logo $\sum_n |b_n(\psi)|$ é convergente.

Atendendo a que se provou que $\sum_n n^2 |b_n(\phi)|$ e $\sum_n |b_n(\psi)|$ são convergentes, por (2.17), vem

$$\sum_n (|R_n| + |I_n|)(|C_n| + |D_n|)$$

é uma série convergente, e finalmente, por (2.16) e pelo critério de Weierstarss, conclui-se que existe $\frac{\partial u}{\partial t}$ e é contínua em $(0, a) \times \mathbb{R}_0^+$.

- Existe $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ e é contínua em $(0, a) \times \mathbb{R}^+$.

Provemos que $\sum_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}(x, t)$ converge uniformemente em $[0, a] \times [\varepsilon, T]$, em que $0 < \varepsilon < T$.

Comecemos por notar que se tem

$$\left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}(x, t) \right| \leq C(n^4 |b_n(\phi)| + n^2 |b_n(\psi)|) e^{(R_n + I_n)\varepsilon},$$

para alguma constante positiva C , independente de n , e para $(x, t) \in (0, a) \times [\varepsilon, T]$. Observamos que se não exigirmos condições de regularidade às funções ϕ e ψ , então

$$C(n^4 |b_n(\phi)| + n^2 |b_n(\psi)|) e^{(R_n + I_n)\varepsilon} \leq C(n^4 + n^2) e^{(R_n + I_n)\varepsilon},$$

em que a série numérica com termo geral $(n^4 + n^2)e^{(R_n + I_n)\varepsilon}$ é divergente. Atendendo a este facto, considera-se

$$\left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}(x, t) \right| \leq C(n^4 |b_n(\phi)| + n^2 |b_n(\psi)|), (x, t) \in (0, a) \times [\varepsilon, T], \quad (2.18)$$

e impor condições de regularidade às funções que definem as condições iniciais.

De

$$\phi(0) = \phi(a) = \phi''(0) = \phi''(a) = \phi^{(4)}(0) = \phi^{(4)}(a) = 0$$

e

$$\psi(0) = \psi(a) = \psi''(0) = \psi''(a) = 0,$$

vem

$$|b_n(\phi)| = \frac{a^5}{(n\pi)^5} |a_n(\phi^{(5)})|, |b_n(\psi)| = \frac{a^3}{(n\pi)^3} |a_n(\psi^{(3)})|.$$

Logo

$$n^4 |b_n(\phi)| \leq C \frac{1}{n} |a_n(\phi^{(5)})|, n^2 |b_n(\psi)| \leq C \frac{1}{n} |a_n(\psi^{(3)})|$$

e, atendendo a que se pode demonstrar que $\sum_n \frac{1}{n} |a_n(\phi^{(5)})|$ e $\sum_n \frac{1}{n} |a_n(\psi^{(3)})|$ são convergentes, estabeleceu-se que $\sum_n (n^4 |b_n(\phi)| + n^2 |b_n(\psi)|)$ é convergente. Finalmente, tendo em atenção a desigualdade (2.18), conclui-se que $\sum_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}(x, t)$ é uniformemente convergente em $(0, a) \times [\varepsilon, T]$.

- Existem $\frac{\partial^j u}{\partial x^j}, j = 1, 2$, e são contínuas em $(0, a) \times \mathbb{R}^+$.

Não se apresenta a prova desta regularidade pois é análoga às provas anteriores.

- Existe $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}$ e é contínua em $(0, a) \times \mathbb{R}^+$.

Prove-se que $\sum_n \frac{\partial^3 u_n}{\partial x^2 \partial t}(x, t)$ converge uniformemente em $[0, a] \times [\varepsilon, T]$, em que $0 < \varepsilon < T$.

Note-se que

$$\left| \frac{\partial^3 u_n}{\partial x^2 \partial t}(x, t) \right| \leq C(n^4 |b_n(\phi)| + n^2 |b_n(\psi)|), (x, t) \in (0, a) \times [\varepsilon, T], \quad (2.19)$$

e portanto a prova segue a prova da existência de $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ e da sua continuidade em $(0, a) \times \mathbb{R}^+$.

- O método de separação de variáveis utilizado permite concluir que u satisfaz a equação diferencial de (1.1) bem como as restantes condições.

□

Observa-se que nas hipóteses da Proposição 2.1, a solução encontrada tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em $[0, a] \times \mathbb{R}^+$ e existe $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ contínua no conjunto anterior.

2.3 Princípio de conservação de energia

Nesta secção pretende-se introduzir um conceito de energia para o qual se tem conservação. Sabe-se que no caso particular da equação da onda, isto é, do problema diferencial

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (x, t) \in (0, a) \times \mathbb{R}^+ \\ u(0, t) = u(a, t) = 0, & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in (0, a) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), & x \in (0, a), \end{cases} \quad (2.20)$$

a energia $E_w : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$E_w(t) = \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_{L^2}^2 + \frac{c^2}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}^2, t \in \mathbb{R}_0^+,$$

mantém-se constante e tem-se

$$E_w(t) = \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(0) \right\|_{L^2}^2 + \frac{c^2}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(0) \right\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2} \|\psi\|_{L^2}^2 + \frac{c^2}{2} \|\phi'\|_{L^2}^2, t \in \mathbb{R}_0^+.$$

É claro que tal resultado vale sob condições de regularidade para ϕ e ψ que garantem que (2.20) tem solução no sentido da definição anteriormente introduzida e adaptada ao problema (2.20).

Considera-se seguidamente uma alteração ao conceito de energia introduzido que vai permitir concluir um princípio de conservação.

Definição 2.2. *Seja u solução do problema (1.1) no sentido da Definição 2.1. A $E : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$E(t) = \frac{\rho}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha_1}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}^2 + \alpha_2 \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(s) \right\|_{L^2}^2 ds \quad (2.21)$$

chama-se energia de u .

O resultado seguinte estabelece que a energia definida por (2.21) é conservada no tempo.

Proposição 2.2. [Princípio de conservação de energia] *Seja u solução do problema (1.1) no sentido da Definição 2.1 e tal que as derivadas parciais de primeira ordem são contínuas em $[0, a] \times \mathbb{R}^+$ e existe $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ contínua no conjunto anterior. Então*

$$E(t) = \frac{\rho}{2} \|\psi\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha_1}{2} \|\phi'\|_{L^2}^2, t \in \mathbb{R}_0^+ \quad (2.22)$$

Dem: Da equação diferencial de (1.1) vem

$$\rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t), \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right) = \alpha_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t), \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right) + \alpha_2 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}(t), \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right), \quad (2.23)$$

em que (\cdot, \cdot) denota o produto interno usual de $L^2(0, a)$.

Nota-se que

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t), \frac{\partial u}{\partial t}(t)\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_{L^2}^2, \quad (2.24)$$

e, tendo em atenção as condições de fronteira, é fácil provar que se tem

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t), \frac{\partial u}{\partial t}(t)\right) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}^2, \quad (2.25)$$

e

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}(t), \frac{\partial u}{\partial t}(t)\right) = -\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(t) \right\|_{L^2}^2. \quad (2.26)$$

Considerando (2.24), (2.25) e (2.26) em (2.23) obtém-se

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha_1}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}^2 + \alpha_2 \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(s) \right\|_{L^2}^2 ds \right) = 0, t > 0,$$

e, portanto,

$$\frac{\rho}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha_1}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(t) \right\|_{L^2}^2 + \alpha_2 \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(s) \right\|_{L^2}^2 ds = \text{Const}, t > 0. \quad (2.27)$$

Uma vez que $E(t)$ é contínua em \mathbb{R}_0^+ , de (3.20) vem $E(t) = E(0)$, para $t \in \mathbb{R}_0^+$, e finalmente (2.22).

□

2.4 Estabilidade e unicidade de solução

Nesta secção pretende-se provar a unicidade de solução do problema diferencial (1.1) utilizando a Proposição 2.2 e, em seguida, estudar a estabilidade deste problema. Para o efeito considera-se a desigualdade de Poincaré-Friedrichs válida em $H_0^1(0, a)$: existe uma constante positiva C_P tal que

$$\|v\|_{L^2} \leq C_P \|v'\|_{L^2}, \forall v \in H_0^1(0, a). \quad (2.28)$$

No resultado anterior, por $H_0^1(0, a)$ denota-se o espaço de Sobolev onde se considera a norma usual

$$\|v\|_{H^1} = (\|v\|_{L^2} + \|v'\|_{L^2})^{1/2}.$$

Utilizando a desigualdade (2.28), estabelece-se o corolário seguinte:

Corolário 2.1. *Seja u solução de (1.1) que verifica as hipóteses da Proposição 2.2. Então existe uma constante C_E , independente de u , tal que*

$$\|u(t)\|_{H^1}^2 \leq C_E (\|\psi\|_{L^2}^2 + \|\phi\|_{H^1}^2), t \in \mathbb{R}_0^+. \quad (2.29)$$

O resultado de unicidade é estabelecido na proposição seguinte.

Proposição 2.3. *Se o problema (1.1) tem solução no sentido da Definição 2.1 nas condições da Proposição 2.2, então esta é única.*

Dem: Sejam u e \tilde{u} soluções do problema (1.1) e seja $w = u - \tilde{u}$. Então w é solução de (1.1) com condições iniciais nulas. Pelo Corolário 3.2 obtém-se $\|w(t)\|_{H^1} = 0$.

Atendendo a que w é contínua em $[0, a] \times \mathbb{R}_0^+$ tem-se $w(x, t) = 0$ em $(0, a) \times \mathbb{R}_0^+$.

Mas, $w(0, t) = w(a, t) = 0$ e portanto $w(x, t) = 0$ em $[0, a] \times \mathbb{R}_0^+$, ou seja, $u = \tilde{u}$ em $[0, a] \times \mathbb{R}_0^+$. \square

O conceito de estabilidade está associado à propagação no tempo de perturbações dos dados iniciais. Intuitivamente, o problema diferencial (1.1) diz-se estável ou a sua solução diz-se uma solução estável se "ao considera-se uma vizinhança da solução, existem vizinhanças das condições iniciais tais que ao considerar-se condições iniciais nessas vizinhanças, então a solução correspondente vai estar na vizinhança da solução previamente fixada".

Definição 2.3. O problema (1.1) diz-se estável ou a sua solução diz-se estável em \mathbb{R}_0^+ se qualquer que seja $T > 0$, se tem

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tilde{\phi} \in H_0^1(0, a), \|\tilde{\phi} - \phi\|_{H^1} < \delta, \tilde{\psi} \in L^2(0, a), \|\tilde{\psi} - \psi\|_{L^2} < \delta \\ \implies \|\tilde{u}(t) - u(t)\|_{H^1} < \varepsilon, t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Proposição 2.4. Nas condições do Corolário 3.2, o problema (1.1) é estável em \mathbb{R}_0^+ .

Dem: Seja $T > 0$, $\varepsilon > 0$, $\tilde{\psi} \in L^2(0, a)$, $\tilde{\phi} \in H_0^1(0, a)$ e \tilde{u} a correspondente solução do problema diferencial (1.1). Seja $\omega = u - \tilde{u}$. Então ω satisfaz a equação diferencial e as condições de fronteira de (1.1) e tem as condições iniciais seguintes

$$\omega(0) = \phi - \tilde{\phi}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t}(0) = \psi - \tilde{\psi}.$$

Considera-se $\tilde{\phi} \in H_0^1(0, a)$ e $\tilde{\psi} \in L^2(0, a)$ para as quais \tilde{u} está nas condições do Corolário 3.2, obtém-se

$$\|\omega(t)\|_{H^1}^2 \leq C_E (\|\psi - \tilde{\psi}\|_{L^2}^2 + \|\phi - \tilde{\phi}\|_{H^1}^2), t \in [0, T].$$

Assim, fixando $\delta < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2C_E}}$ e $\|\tilde{\phi} - \phi\|_{H^1} < \delta, \|\tilde{\psi} - \psi\|_{L^2} < \delta$, conclui-se

$$\|\tilde{u}(t) - u(t)\|_{H^1} < \varepsilon, t \in [0, T].$$

\square

Capítulo 3

Método Numérico semi-discreto

Neste capítulo pretende-se introduzir um método semi-discreto e estudar as suas propriedades: existência, estabilidade e convergência.

3.1 Resultados auxiliares e notações

O objetivo central desta secção é a definição do quadro funcional em que se irá desenvolver a análise de convergência do método proposto. Introduzem-se as notações a considerar, os operadores de diferenças finitas e alguns resultados auxiliares. Salienta-se que alguns dos resultados aqui apresentados não são mais do que versões discretas de resultados conhecidos.

Seja $N > 0$ e seja $h = (h_1, \dots, h_N)$ um vetor de entradas positivas tal que $\sum_{i=1}^N h_i = a$. Em $[0, a]$ introduz-se a partição $\bar{I}_h = \{x_i \in [0, a], 0 \leq i \leq N, 0 = x_0 < \dots < x_i < \dots < x_N = a\}$, em que $x_i - x_{i-1} = h_i$, $1 \leq i \leq N$. Formando-se assim uma malha não uniforme definida por x_i , $0 \leq i \leq N$ e h_i , $1 \leq i \leq N$ em $[0, a]$.

Seguidamente introduz-se o espaço de funções de rede, isto é, funções definidas nos pontos da partição \bar{I}_h em que se considera um produto interno e a correspondente norma que podem ser vistos como versões discretas dos correspondentes conceitos no espaço $L^2(0, a)$.

Definição 3.1. *Seja $V_h^0(\bar{I}_h) = \{u_h : \bar{I}_h \rightarrow \mathbb{R}, u_h(x_0) = u_h(x_N) = 0\}$ o espaço vetorial das funções de rede onde se considera o produto interno*

$$(u_h, v_h)_h = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{h_{i+1} + h_i}{2} u_h(x_i) v_h(x_i), \quad \forall u_h, v_h \in V_h^0(\bar{I}_h) \quad (3.1)$$

e a correspondente norma

$$\|u_h\|_h = \sqrt{(u_h, u_h)_h}, \quad \forall u_h \in V_h^0(\bar{I}_h). \quad (3.2)$$

Introduz-se agora a seguinte notação

$$(u_h, v_h)_+ = \sum_{i=1}^N h_i u_h(x_i) v_h(x_i) \quad e \quad \|u_h\|_+ = \sqrt{(u_h, u_h)_+}, \quad \forall u_h, v_h \in V_h^0(\bar{I}_h). \quad (3.3)$$

Como foi anteriormente referido, pretende-se introduzir um método de semi-discretização utilizando a abordagem do métodos das linhas. Nesta abordagem, as variáveis espaciais são discretizadas por operadores de diferenças finitas. Introduce-se seguidamente os operadores backward D_- e centrado de segunda ordem D_2 definidos por

$$D_-u_h(x_i) = \frac{u_h(x_i) - u_h(x_{i-1}))}{h_i}, \quad D_2u_h(x_i) = \frac{D_-u_h(x_{i+1}) - D_-u_h(x_i)}{\frac{h_{i+1}+h_i}{2}}, \quad \forall u_h \in V_h^0(\bar{I}_h).$$

Utilizando os elementos anteriores, introduz-se em $V_h^0(\bar{I}_h)$ a seguinte norma

$$\|u_h\|_{1,h} = \sqrt{\|u_h\|_h^2 + \|D_-u_h\|_+^2}, \quad \forall u_h \in V_h^0(\bar{I}_h). \quad (3.4)$$

A norma anterior pode efetivamente ser vista como a discretização da norma usual de $H^1(0, a)$.

Definição 3.2. *Seja X um espaço vetorial normado com norma $\|\cdot\|_X$, introduz-se o seguinte espaço vetorial*

$$L^p(0, T, X) = \{f : [0, T_f] \rightarrow X : \int_0^T \|f(s)\|_X^p ds < +\infty\} \quad (3.5)$$

munido da seguinte norma

$$\|f\|_{L^p(0, T, X)} = \left[\int_0^T \|f(s)\|_X^p ds \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (3.6)$$

Introduz-se no que se segue duas propriedades muito importantes e que podem ser vistas como versões discretas das bem conhecidas fórmula de integração por partes e desigualdade de Poincaré-Friedrichs.

Proposição 3.1. (Soma por partes)

Sejam $u_h, v_h \in V_h^0(\bar{I}_h)$, então

$$(D_2u_h, v_h)_h = -(D_-u_h, D_-v_h)_+ \quad (3.7)$$

Dem: Utilizando a definição do produto interno $(\cdot, \cdot)_h$ e do operador D_2 , obtém-se, sucessivamente,

$$\begin{aligned} (D_2u_h, v_h)_h &= \sum_{i=1}^{N-1} D_-u_h(x_{i+1})v_h(x_i) - \sum_{i=1}^{N-1} D_-u_h(x_i)v_h(x_i) = \sum_{i=1}^N D_-u_h(x_i)(v_h(x_{i-1}) - v_h(x_i)) \\ &= - \sum_{i=1}^N h_i D_-u_h(x_i) D_-v_h(x_i) = -(D_-u_h, D_-v_h)_+ \end{aligned} \quad (3.8)$$

□

Proposição 3.2. (Desigualdade de Poincaré-Friedrichs discreta)

Seja $u_h \in V_h^0(\bar{I}_h)$, então

$$\|u_h\|_h^2 \leq a^2 \|D_-u_h\|_+^2 \quad (3.9)$$

Dem: Atendendo à representação $u_h(x_i) = \sum_{j=1}^i h_j D_-u_h(x_j)$, e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtém-se

$$u_h(x_i)^2 = \left[\sum_{j=1}^i h_j D_- u_h(x_j) \right]^2 \leq \sum_{j=1}^i h_j \sum_{j=1}^N h_j [D_- u_h(x_j)]^2 \leq a \|D_- u_h\|_+^2. \quad (3.10)$$

A partir da desigualdade anterior, vem agora facilmente o seguinte

$$\|u_h\|_h^2 = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{h_{i+1} + h_i}{2} u_h(x_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{N-1} \frac{h_{i+1} + h_i}{2} a \|D_- u_h\|_+^2 \leq a^2 \|D_- u_h\|_+^2. \quad (3.11)$$

□

Para além dos resultado anteriores, futuramente será necessário o conhecido lema de Grönwal.

Lema 3.1. (Lema de Grönwal) [7]

Se f , g e p são funções contínuas e não negativas em $[0, T]$ tais que p é não decrescente e

$$f(t) \leq p(t) + \int_0^t g(s) f(s) ds, \quad t \in [0, T],$$

então

$$f(t) \leq p(t) e^{\int_0^t g(s) ds}, \quad t \in [0, T].$$

3.2 Existência de solução

Os operadores introduzidos na secção anterior são agora utilizados para definir uma aproximação semi-discreta para a solução do problema diferencial (1.1). Para o efeito, o último problema diferencial irá ser substituído por um problema de condições iniciais que é estudado neste capítulo. Provando-se a existência e unicidade de solução deste novo problema.

Introduz-se seguidamente a aproximação semi-discreta $u_h(x_i, t) \simeq u(x_i, t)$ que é solução do seguinte problema de condições iniciais

$$\begin{cases} \rho u_h''(x_i, t) = \alpha_1 D_2 u_h(x_i, t) + \alpha_2 D_2 u_h'(x_i, t), & t \in \mathbb{R}^+ \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ u_h(x_0, t) = u_h(x_N, t) = 0, & t \in \mathbb{R}^+ \\ u_h(x_i, 0) = \phi_h(x_i), & 1 \leq i \leq N-1 \\ u_h'(x_i, 0) = \psi_h(x_i), & 1 \leq i \leq N-1 \end{cases}. \quad (3.12)$$

O sistema diferencial ordinário (3.12) pode ser reescrito na forma de um sistema diferencial matricial ordinário.

De facto, considerando a nova variável $y_h(x_i, t) = u_h'(x_i, t)$, $t \in \mathbb{R}_0^+$, $0 \leq i \leq N$, o sistema (3.12) admite a representação equivalente seguinte

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_h(x_i, t) = y_h(x_i, t), \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \leq i \leq N \\ y'_h(x_i, t) = \frac{\alpha_1}{\rho} D_2 u_h(x_i, t) + \frac{\alpha_2}{\rho} D_2 y_h(x_i, t), \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ u_h(x_0, t) = u_h(x_N, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ y_h(x_0, t) = y_h(x_N, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ u_h(x_i, 0) = \phi_h(x_i), \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ y_h(x_i, 0) = \psi_h(x_i), \quad 1 \leq i \leq N-1 \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Seja agora

$$Z_h(t) = [u_h(t) \ y_h(t)]^\top = [[u_h(x_i, t)]_{1 \leq i \leq N-1} \ [y_h(x_i, t)]_{1 \leq i \leq N-1}]^\top$$

$$Z_h(0) = [[\phi_h(x_i)]_{1 \leq i \leq N-1} \ [\psi_h(x_i)]_{1 \leq i \leq N-1}]^\top.$$

Com as notações anteriores, (3.13) é equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{l} Z'_h(t) = \mathcal{A} Z_h(t), \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ Z_h(0) \text{ dado} \end{array} \right. , \quad (3.14)$$

onde $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I_{N-1} \\ \frac{\alpha_1}{\rho} A & \frac{\alpha_2}{\rho} A \end{bmatrix}$ com $A = \text{tridiag}(\frac{2}{h_i(h_i+h_{i+1})}, -\frac{2}{h_i h_{i+1}}, \frac{2}{h_{i+1}(h_i+h_{i+1})})$.

Definição 3.3. Uma função $Z_h : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^{2(N-1)}$ diz-se solução de (3.14) se

1. $Z_h \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap C^0(\mathbb{R}_0^+)$,
2. Z_h verifica a EDP matricial e a condição inicial de (3.14).

Observa-se que a solução de (3.14) admite a representação

$$Z_h(t) = Z_h(0) e^{\mathcal{A}t} \quad t \in \mathbb{R}_0^+, \quad (3.15)$$

e esta função verifica a definição anterior.

Uma vez que o problema anterior é linear, o estudo da estabilidade do sistema diferencial reduz-se à obtenção de uma estimativa para $\|\mathcal{A}\|$ relativamente à norma matricial induzida pela norma vectorial considerada. De facto, tem-se

$$\|Z_h(t)\| \leq \|Z_h(0)\| e^{\|\mathcal{A}\|t}, \quad t \geq 0.$$

Por exemplo, relativamente à norma $\|\cdot\|_\infty$, vem

$$\|Z_h(t)\| \leq \|Z_h(0)\| e^{\max_i \left\{ 1, \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\rho} \frac{4}{h_i h_{i+1}} \right\} t}, \quad t \geq 0.$$

Observa-se que, utilizando a representação anterior, não se consegue concluir a estabilidade em \mathbb{R}^+ e além disso, não se consegue mostrar que a solução encontrada é limitada quando h_i se torna arbitrariamente pequenos.

3.3 Estabilidade e unicidade de solução

Note-se que na secção anterior se observou que utilizando a representação matricial da solução, não se consegue obter um resultado de estabilidade. Por outro lado, sabe-se que para o problema diferencial inicial vale um princípio de conservação de energia e tem-se estabilidade. É assim natural, procurar resultados para a aproximação semi-discreta definida por (3.12) análogos aos já estabelecidos para o problema contínuo.

O objetivo central desta secção é estabelecer resultados de conservação de energia e de estabilidade análogos aos estabelecidos para o modelo contínuo, no sentido em que podem ser vistos como versões discretas dos correspondentes resultados para o problema diferencial contínuo. Para o efeito, vai-se seguir as provas do caso contínuo mas considerando o quadro funcional discreto já introduzido. Assim, nesta secção é apresentado o resultado de conservação de energia que tem como corolário um resultado de unicidade de solução da aproximação semi-discreta, e ainda o estudo da estabilidade.

Começa-se esta secção introduzindo a versão discreta do conceito de energia introduzido para o caso contínuo.

Definição 3.4. *Seja u_h solução do problema (3.12). A $E_h : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$E_h(t) = \frac{\rho}{2} \|u'_h(t)\|_h^2 + \frac{\alpha_1}{2} \|D_- u_h(t)\|_+^2 + \alpha_2 \int_0^t \|D_- u'_h(\tau)\|_+^2 d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_0^+, \quad (3.16)$$

chama-se energia discreta de u_h

O resultado seguinte estabelece que a energia definida por (3.16) é conservada no tempo.

Proposição 3.3. *Seja u_h solução do problema (3.12) no sentido da definição de solução considerada. Então*

$$E_h(t) = \frac{\rho}{2} \|\psi_h\|_h^2 + \frac{\alpha_1}{2} \|D_x^- \phi_h\|_+^2, \quad t \in \mathbb{R}_0^+. \quad (3.17)$$

Dem: Da equação diferencial de (3.12) tem-se

$$\rho (u''_h(t), u'_h(t))_h = \alpha_1 (D_2 u_h(t), u'_h(t))_h + \alpha_2 (D_2 u'_h(t), u'_h(t))_h \quad (3.18)$$

Atendendo a resultados provados anteriormente e às condições de fronteira vem

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho}{2} (\|u'_h(t)\|_h^2 + \frac{\alpha_1}{2} \|D_- u_h(t)\|_+^2 + \alpha_2 \int_0^t \|D_- u'_h(\tau)\|_+^2 d\tau) \right) = 0, \quad (3.19)$$

logo

$$\frac{\rho}{2} \|u'_h(t)\|_h^2 + \frac{\alpha_1}{2} \|D_- u_h(t)\|_+^2 + \alpha_2 \int_0^t \|D_- u'_h(\tau)\|_+^2 d\tau = \text{Const.} \quad (3.20)$$

Uma vez que $E_h(t)$ é contínua em \mathbb{R}_0^+ , do resultado anterior vem $E_h(t) = E_h(0)$ o que leva à igualdade (3.17). □

Corolário 3.1. *O sistema diferencial ordinário (3.12) tem solução única.*

Dem: Sejam $u_h(t)$ e $v_h(t)$ duas soluções de (3.12) e seja $\omega_h(t) = u_h(t) - v_h(t)$. Esta função de rede é solução de (3.12) com condições iniciais nulas. Assim, pelo princípio de conservação de energia, vem $E_h(t) = 0$ e portanto $\|D_- \omega_h(t)\|_+ = 0$. Logo, $D_- \omega_h(x_i, t) = 0, i = 1, \dots, N$, o que permite concluir que $\omega_h(x_0, t) = \omega_h(x_1, t) = \dots = \omega_h(x_N, t)$. Atendendo a que $\omega_h(x_0, t) = \omega_h(x_N, t) = 0$, vem $\omega_h(x_i, t) = 0, i = 0, \dots, N$, ou seja, $u_h(t) = v_h(t)$. □

O princípio de conservação de energia e a desigualdade de Poincaré-Friedrichs permitem estabelecer um majorante relativamente à norma $\|\cdot\|_{1,h}$ para a solução de (3.12).

Corolário 3.2. *Seja u_h solução (3.12) que verifica as hipóteses da Proposição 3.3. Então existe uma constante C_E , independente de h e t , tal que*

$$\|u_h(t)\|_{1,h}^2 \leq C_E (\|\psi_h\|_h^2 + \|\phi_h\|_{1,h}^2), t \in \mathbb{R}_0^+. \quad (3.21)$$

O conceito de estabilidade está associado à propagação no tempo de perturbações dos dados iniciais. Intuitivamente, o problema diferencial (3.12) diz-se estável ou a solução diz-se uma solução estável pequenas perturbações nos dados induzem pequenas perturbações na solução.

Para isso começa-se por apresentar a definição de estabilidade para o caso semi-discreto que pode ser vista como uma versão discreta da definição introduzida anteriormente para o caso contínuo.

Definição 3.5. *O problema (3.12) diz-se estável em \mathbb{R}_0^+ se $\forall T > 0$*

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tilde{\phi}_h \in \{p : \|p - \phi_h\|_{1,h} < \delta\}, \forall \tilde{\psi}_h \in \{q : \|q - \psi_h\|_h < \delta\} \\ \implies \|u_h(t) - \tilde{u}_h(t)\|_{1,h} < \varepsilon, t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

É claro que a partir do Corolário 3.2, pode-se de imediato concluir que o sistema (3.12) é estável. De facto, ao considerar-se duas soluções de (3.12), $u_h(t)$ e $v_h(t)$, com condições definidas por funções de rede ϕ_h, ψ_h e $\tilde{\phi}_h$ e $\tilde{\psi}_h$, então, pelo Corolário 3.2, conclui-se

$$\|u_h(t) - v_h(t)\|_{1,h}^2 \leq C_E (\|\psi_h - \tilde{\psi}_h\|_h^2 + \|\phi_h - \tilde{\phi}_h\|_{1,h}^2), t \in [0, T], \forall T > 0,$$

logo, para ε positivo pode-se garantir a existência de $\delta > 0$ verificando a Definição 3.5.

A solução semi-discreta $u_h(t)$ é definida a partir de um sistema diferencial ordinário e portanto, no contexto deste tipo de problemas, surge o conceito ponto de equilíbrio. Recordando, u_h diz-se ponto de equilíbrio de (3.12) se $u_h'(t) = 0$. Logo, u_h satisfaz

$$D_2 u_h(x_i) = 0, 1 \leq i \leq N-1 \text{ e } u_h(x_0) = u_h(x_N) = 0.$$

Atendendo a a que de $D_2 u_h = 0$, vem $(D_2 u_h, u_h)_h = \|D_- u_h\|_+^2 = 0$, e das condições em x_0 e x_N , conclui-se que $u_h = 0$. Mais ainda, este ponto de equilíbrio é estável.

3.4 Convergência

Nesta secção pretende-se estabelecer que o erro da aproximação semi-discreta $u_h(t)$ definida por (3.12) é de segunda ordem relativamente à norma $\|\cdot\|_{1,h}$. Inicia-se esta secção com a construção do sistema diferencial para o erro da aproximação $u_h(t)$ que depende do erro de truncatura. Observa-se que o erro de truncatura é de primeira ordem relativamente à norma $\|\cdot\|_\infty$ e, portanto, é expectável que o erro de semi-discretização seja também de primeira ordem. No resultado principal deste trabalho, Corolário 3.3, estabelece-se que o erro de semi-discretização é de segunda ordem relativamente à norma $\|\cdot\|_{1,h}$.

Seja então $e_h(x_i, t) = u(x_i, t) - u_h(x_i, t)$, $e_h(x_i, 0) = \phi(x_i) - \phi_h(x_i)$, $e'_h(x_i, 0) = \psi(x_i) - \psi_h(x_i)$. Seja ainda $T_h(t)$ o erro de truncatura induzido pela discretização espacial definida pelo operador D_2 . É fácil estabelecer que os erros $e_h(t)$ e $T_h(t)$ verificam

$$\begin{cases} \rho e''_h(x_i, t) = \alpha_1 D_2 e_h(x_i, t) + \alpha_2 D_2 e'_h(x_i, t) + T_h(x_i, t), & t \in (0, T] \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ e_h(x_0, t) = e_h(x_N, t) = 0, & t \in (0, T] \\ e_h(x_i, 0) \text{ e } e'_h(x_i, 0) \text{ dados,} & 1 \leq i \leq N-1 \end{cases} \quad (3.23)$$

Proposição 3.4. *Seja $u(t), u'(t) \in C^4([0, a])$. Então o erro de truncatura $T_h(t)$ admite a seguinte representação*

$$T_h(x_i, t) = \left(\alpha_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t) + \alpha_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t}(x_i, t) \right) \frac{h_{i+1} - h_i}{3} + T_R(x_i, t), \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (3.24)$$

em que $h_{\max} = \max_i h_i$ e

$$\exists C > 0 : |T_R(x_i, t)| \leq C \left(\|u(t)\|_{C^4} + \|u'(t)\|_{C^4} \right) h_{\max}^2, \quad 1 \leq i \leq N-1.$$

Dem: De facto, considerando a formula de Taylor, tem-se

$$D_2 u(x_i, t) \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t) + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t) \frac{h_{i+1} - h_i}{3} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi, t) \frac{h_{i+1}^2 - h_{i+1}h_i + h_i^2}{12}, \quad (3.25)$$

em que $\xi \in (x_{i-1}, x_{i+1})$.

Logo o erro de truncatura da discretização da segunda derivada espacial é dado por

$$T_h(x_i, t) = \left(\alpha_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t) + \alpha_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t}(x_i, t) \right) \frac{h_{i+1} - h_i}{3} + \left(\alpha_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi, t) + \alpha_2 \frac{\partial^5 u}{\partial x^4 \partial t}(\xi, t) \right) \frac{h_{i+1}^2 - h_{i+1}h_i + h_i^2}{12}, \quad (3.26)$$

e

$$\begin{aligned} |T_R(x_i, t)| &= \left| \left(\alpha_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi, t) + \alpha_2 \frac{\partial^5 u}{\partial x^4 \partial t}(\xi, t) \right) \frac{h_{i+1}^2 - h_{i+1}h_i + h_i^2}{12} \right| \\ &\leq \frac{\max\{\alpha_1, \alpha_2\}}{12} \left(\|u(t)\|_{C^4} + \|u'(t)\|_{C^4} \right) h_{\max}^2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

□

Proposição 3.5. Se $t \in [0, T]$, com $T > 0$ e $u(t), u'(t) \in C^4([0, a])$, então existe uma constante positiva L , independente de t e h , tal que

$$\|e'_h(t)\|_h^2 + \|D_- e_h(t)\|_+^2 + \int_0^t \|D_- e'_h(\tau)\|_+^2 d\tau \leq L(\|e'_h(0)\|_h^2 + \|e_h(0)\|_{1,h}^2 + h_{\max}^4 (\|u\|_{L^2(0,T,C^4)}^2 + \|u'\|_{L^2(0,T,C^4)}^2)). \quad (3.28)$$

Dem: Seguindo a demonstração da Proposição 3.3, pode-se demonstrar que se tem

$$\frac{\rho}{2}\|e'_h(t)\|_h^2 + \frac{\alpha_1}{2}\|D_- e_h(t)\|_+^2 + \alpha_2 \int_0^t \|D_- e'_h(\tau)\|_+^2 d\tau = \frac{\rho}{2}\|e^{v,0}\|_h^2 + \frac{\alpha_1}{2}\|D_- e_h^0\|_+^2 + \int_0^t (T_h(\tau), e'_h(\tau))_h d\tau. \quad (3.29)$$

Note-se que, no que se segue, utiliza-se a seguinte notação: $T_h(t) = T_h^{(1)}(t) + T_h^{(2)}(t) + T_R(t)$, em que

$$T_h^{(1)}(x_i, t) = \alpha_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t) \frac{1}{3}(h_{i+1} - h_i),$$

$$T_h^{(2)}(x_i, t) = \alpha_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t}(x_i, t) \frac{1}{3}(h_{i+1} - h_i).$$

Assim $(T_h(t), e_h(t))_h = \sum_{j=1,2} (T_h^{(j)}(t), e_h(t))_h + (T_R(t), e_h(t))_h$. Seguidamente analisa-se o termo $(T_h^{(1)}(t), e_h(t))_h$. Tem-se sucessivamente

$$\begin{aligned} (T_h^{(1)}(t), e'_h(t))_h &= \alpha_1 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t) e'_h(x_i, t) = \alpha_1 \sum_{i=1}^N \frac{h_i^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_{i-1}, t) e'_h(x_{i-1}, t) - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t) e'_h(x_i, t) \right) \\ &= \alpha_1 \sum_{i=1}^N \frac{h_i^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_{i-1}, t) \frac{e'_h(x_{i-1}, t) - e'_h(x_i, t)}{h_i} - h_i \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_{i-1}, t) - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t) \right) e'_h(x_i, t) \right) \\ &= -\alpha_1 \sum_{i=1}^N \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_{i-1}, t) D_- e'_h(x_i, t) - \alpha_1 \sum_{i=1}^N \frac{h_i^2}{6} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) e'_h(x_i, t) dx, \end{aligned} \quad (3.30)$$

e

$$\begin{aligned} |(T_h^{(1)}(t), e'_h(t))_h| &\leq \frac{1}{6} \|u(t)\|_{C^3} \sum_{i=1}^N h_i^3 |D_- e'_h(x_i, t)| + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N h_i^2 \sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) \right|^2 dx} \sqrt{h_i} |e'_h(x_i, t)| \\ &\leq \frac{1}{6} \|u(t)\|_{C^3} \sqrt{\sum_{i=1}^N h_i^4 h_i} \sqrt{\sum_{i=1}^N h_i [D_- e'_h(x_i, t)]^2} + \frac{1}{6} \sqrt{\sum_{i=1}^N h_i^4 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) \right|^2 dx} \sqrt{\sum_{i=1}^N h_i e'_h(x_i, t)^2} \\ &\leq \frac{1}{6} \|u(t)\|_{C^3} h_{\max}^2 \sqrt{a} \|D_- e'_h(t)\|_+ + \frac{\sqrt{2}}{6} \|u(t)\|_{C^4} h_{\max}^2 \sqrt{a} \|e'_h(t)\|_h. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Uma vez que para $(T_h^{(2)}(t), e_h(t)_h)$ se tem uma representação análoga, obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=1,2} (T_h^{(j)}(t), e_h(t))_h &= - \sum_{i=1}^N \frac{h_i^3}{6} \left(\alpha_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_{i-1}, t) + \alpha_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t}(x_{i-1}, t) \right) D_- e'_h(x_i, t) \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \frac{h_i^2}{6} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\alpha_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) + \alpha_2 \frac{\partial^5 u}{\partial x^4 \partial t}(x, t) \right) e'_h(x_i, t) dx. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1,2} (T_h^{(j)}(t), e_h(t))_h &\leq \frac{1}{6} \left(\alpha_1 \|u(t)\|_{C^3} + \alpha_2 \|u'(t)\|_{C^3} \right) h_{\max}^2 \sqrt{a} \|D_- e'_h(t)\|_+ \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{6} \left(\alpha_1 \|u(t)\|_{C^4} + \alpha_2 \|u'(t)\|_{C^4} \right) h_{\max}^2 \sqrt{a} \|e'_h(t)\|_h. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Por outro lado, tem-se também

$$(T_R(t), e'_h(t))_h \leq \|T_R(t)\|_h \|e'_h(t)\|_h \leq C \left(\|u(t)\|_{C^4} + \|u'(t)\|_{C^4} \right) h_{\max}^2 \sqrt{a} \|e'_h(t)\|_h. \quad (3.34)$$

Conjugando as estimativas anteriores, obtém-se, sucessivamente,

$$\begin{aligned} (T_h(t), e'_h(t))_h &\leq \frac{1}{6} \left(\alpha_1 \|u(t)\|_{C^3} + \alpha_2 \|u'(t)\|_{C^3} \right) h_{\max}^2 \sqrt{a} \|D_- e'_h(t)\|_+ \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{6} \left(\alpha_1 \|u(t)\|_{C^4} + \alpha_2 \|u'(t)\|_{C^4} \right) h_{\max}^2 \sqrt{a} \|e'_h(t)\|_h + C \left(\|u(t)\|_{C^4} + \|u'(t)\|_{C^4} \right) h_{\max}^2 \sqrt{a} \|e'_h(t)\|_h \\ &\leq \frac{a}{4\varepsilon} h_{\max}^4 \left(\frac{\alpha_1^2}{36} \|u(t)\|_{C^3}^2 + \frac{\alpha_2^2}{36} \|u'(t)\|_{C^3}^2 + \frac{\alpha_1^2}{18} \|u(t)\|_{C^4}^2 + \frac{\alpha_2^2}{18} \|u'(t)\|_{C^4}^2 + C^2 \|u(t)\|_{C^4}^2 + C^2 \|u'(t)\|_{C^4}^2 \right) \\ &\quad + 2\varepsilon (\|D_- e'_h(t)\|_+^2 + 2\|e'_h(t)\|_h^2), \end{aligned} \quad (3.35)$$

em que $\varepsilon > 0$ é uma constante arbitrária. Logo existe uma constante positiva C tal que

$$(T_h(t), e'_h(t))_h \leq Ch_{\max}^4 (\|u(t)\|_{C^4}^2 + \|u'(t)\|_{C^4}^2) + 2\varepsilon (\|D_- e'_h(t)\|_+^2 + 2\|e'_h(t)\|_h^2). \quad (3.36)$$

Considerando em (3.29) a estimativa (3.36), tem-se

$$\begin{aligned} &\frac{\rho}{2} \|e'_h(t)\|_h^2 + \frac{\alpha_1}{2} \|D_- e_h(t)\|_+^2 + (\alpha_2 - 2\varepsilon) \int_0^t \|D_- e'_h(\tau)\|_+^2 d\tau \\ &\leq \frac{\rho}{2} \|e'_h(0)\|_h^2 + \frac{\alpha_1}{2} \|D_- e_h(0)\|_+^2 + Ch_{\max}^4 \int_0^t (\|u(\tau)\|_{C^4}^2 + \|u'(\tau)\|_{C^4}^2) d\tau + 4\varepsilon \int_0^t \|e'_h(\tau)\|_h^2 d\tau. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Fixando em (3.37) a constante ε de modo conveniente, pode-se concluir a existência de uma constante positiva L_1 , independente de h e de t , tal que

$$\begin{aligned} & \|e'_h(t)\|_h^2 + \|D_- e_h(t)\|_+^2 + \int_0^t \|D_- e'_h(\tau)\|_+^2 d\tau \\ & \leq L_1 \left(\|e_h^{v,0}\|_h^2 + \|D_- e_h^0\|_+^2 + \max^4 (\|u\|_{L^2(0,T,C^4)}^2 + \|u'\|_{L^2(0,T,C^4)}^2) + \int_0^t \|e'_h(\tau)\|_h^2 d\tau \right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Considerando agora o lema de Grönwal, conclui-se a existência de uma constante positiva L , independente de h e de t , tal que se tem a estimativa (3.28). □

Com base nos resultados anteriores pode-se agora concluir a convergência do método numérico.

Corolário 3.3. *Nas condições da Proposição 3.5, se $\phi_h(x_i) = \phi(x_i)$ e $\psi_h(x_i) = \psi(x_i)$, $1 \leq i \leq N-1$, então existe uma constante positiva L , independente de h e de t , tal que*

$$\|e_h(t)\|_{1,h}^2 \leq Lh^4_{\max} (\|u\|_{L^2(0,T,C^4)}^2 + \|u'\|_{L^2(0,T,C^4)}^2), \quad t \in [0, T]. \quad (3.39)$$

Dem: Pelo Proposição 3.5 tem-se

$$\|D_- e_h(t)\|_+^2 \leq Lh^4_{\max} (\|u\|_{L^2(0,T,C^4)}^2 + \|u'\|_{L^2(0,T,C^4)}^2).$$

Utilizando a Desigualdade de Poincaré-Friedrichs discreta (3.2) vem de imediato o resultado pretendido. □

Capítulo 4

Método numérico discreto no espaço e no tempo

O objetivo central deste capítulo a introdução de um método numérico discreto no espaço e no tempo e o estudo das suas propriedades de estabilidade e convergência.

4.1 Notações e resultados auxiliares

O objetivo desta secção é, analogamente ao da 3.1, a definição do quadro funcional em que se irá construir e desenvolver a análise de convergência do método que se propõe a estudar. Muitas das notações e resultados são idênticos aos definidos no caso semi-discreto por isso não serão aqui mencionados.

Seja $T > 0$ e $M > 0$. Seja ainda $\Delta t = \frac{T}{M}$ e $t_n = t_{n-1} + \Delta t$, $1 \leq n \leq M$, com $t_0 = 0$. Considerando a partição $\{t_n\}_{0 \leq n \leq M}$ de $[0, T]$ e a partição \bar{I}_h de $[0, a]$, introduz-se em $[0, a] \times [0, T]$ a partição

$$\bar{Q}_h^{\Delta t} = \bar{I}_h \times \{t_n\}_{0 \leq n \leq M}$$

Por $V_h^0(\bar{Q}_h^{\Delta t})$ denota-se o espaço das funções de rede definidas em $\bar{Q}_h^{\Delta t}$ nulas em $\{x_0, x_N\} \times \{t_n\}_{0 \leq n \leq M}$, isto é, $V_h^0(\bar{Q}_h^{\Delta t}) = \{u_h : \bar{Q}_h^{\Delta t} \rightarrow \mathbb{R}, u_h^n(x_0) = u_h^n(x_N) = 0, 0 \leq n \leq M\}$.

Com o objetivo de introduzir o método de diferenças finitas discreto no espaço e no tempo, define-se seguidamente os operadores de diferenças backward, D_{-t} , e centrado de 2ª ordem, $D_{2,t}$, no tempo

$$D_{-t}u_h^n(x_i) = \frac{u_h^n(x_i) - u_h^{n-1}(x_i)}{\Delta t}, \quad D_{2,t}u_h^n(x_i) = \frac{D_{-t}u_h^{n+1}(x_i) - D_{-t}u_h^n(x_i)}{\Delta t}$$

onde $u_h \in V_h^0(\bar{Q}_h^{\Delta t})$ e $0 \leq i \leq N$, $1 \leq n \leq M - 1$.

Note-se que, para cada n , u_h^n pode ser visto como uma função de rede em $V_h^0(\bar{Q}_h^{\Delta t})$

Apresenta-se seguidamente alguns resultados têm um papel importante no que se segue. Parte dos resultados estão presentes em [4].

Proposição 4.1. *Se, para $0 \leq n \leq M$, $u_h^n \in V_h^0(\bar{Q}_h^{\Delta t})$ então tem-se*

$$(D_{2,t}u_h^n, D_{-t}u_h^{n+1})_h = \frac{\|D_{-t}u_h^{n+1}\|_h^2 - (D_{-t}u_h^n, D_{-t}u_h^{n+1})_h}{\Delta t} \geq \frac{\|D_{-t}u_h^{n+1}\|_h^2 - \|D_{-t}u_h^n\|_h^2}{2\Delta t}, \quad (4.1)$$

$$(D_{2,x}u_h^{n+1}, D_{-t}u_h^{n+1})_h = \frac{(D_{-x}u_h^n, D_{-x}u_h^{n+1})_+ - \|D_{-x}u_h^{n+1}\|_+^2}{\Delta t} \leq \frac{\|D_{-x}u_h^n\|_+^2 - \|D_{-x}u_h^{n+1}\|_+^2}{2\Delta t} \quad (4.2)$$

e

$$(D_{2,x}D_{-t}u_h^{n+1}, D_{-t}u_h^{n+1})_h = -\|D_{-x}D_{-t}u_h^{n+1}\|_+^2 \quad (4.3)$$

Recorda-se ainda que é válido o lema de Grönwal discreto seguinte.

Lema 4.1. (Lema de Grönwal Discreto) [14]

Se $(f_n)_n$, $(g_n)_n$ e $(p_n)_n$ são sucessões não negativas tais que $(p_n)_n$ é não decrescente e

$$f_n \leq p_n + \sum_{k=0}^n g_k f_k, \quad 0 \leq n \leq M,$$

então

$$f_n \leq p_n e^{\sum_{k=0}^n g_k}, \quad 0 \leq n \leq M.$$

Sejam ϕ_h e ψ_h aproximações em $V_h^0(\bar{Q}_h^{\Delta t})$ para ϕ e ψ , respetivamente. Assim, a aproximação discreta no espaço e no tempo para a solução de (1.1), $u_h \in V_h^0(\bar{Q}_h^{\Delta t})$, é solução do problema seguinte

$$\begin{cases} \rho D_{2,t}u_h^n(x_i) = \alpha_1 D_{2,x}u_h^{n+1}(x_i) + \alpha_2 D_{2,x}D_{-t}u_h^{n+1}(x_i), & 1 \leq i \leq N-1, 1 \leq n \leq M-1 \\ u_h^n(x_0) = u_h^n(x_N) = 0, & 1 \leq n \leq M \\ u_h^0(x_i) = \phi_h(x_i), & 1 \leq i \leq N-1 \\ D_t u_h^0(x_i) = \psi_h(x_i), & 1 \leq i \leq N-1 \end{cases} \quad (4.4)$$

tendo-se então $u(x_i, t_n) \simeq u_h^n(x_i)$, $0 \leq i \leq N$, $0 \leq n \leq M$.

A discretização da velocidade inicial da condição para a velocidade inicial é feita considerando o operador forward D_t em $u_h^0(x_i)$, isto é,

$$D_t u_h^0(x_i) = \frac{u_h^1(x_i) - u_h^0(x_i)}{\Delta t}$$

que coincide com a discretização backward D_{-t} em $u_h^1(x_i)$, ou seja,

$$D_t u_h^0(x_i) = D_{-t} u_h^1(x_i)$$

Uma vez que $u_h^0(x_i) = \phi_h(x_i)$, $1 \leq i \leq N-1$, facilmente, a partir de $D_{-t} u_h^1(x_i) = \psi_h(x_i)$, $1 \leq i \leq N-1$, obtém-se para $u_h^1(x_i)$ a seguinte expressão

$$u_h^1(x_i) = \phi_h(x_i) + \Delta t \psi_h(x_i), \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (4.5)$$

O sistema () pode ser reescrito na forma equivalente

$$\begin{cases} \rho D_{2,t} u_h^n = \alpha_1 D_{2,x} u_h^{n+1} + \alpha_2 D_{2,x} D_{-t} u_h^{n+1}, & 1 \leq n \leq M-1 \\ u_h^n(x_0) = u_h^n(x_N) = 0, & 1 \leq n \leq M \\ u_h^0 = \phi_h \\ D_t u_h^0 = \psi_h \end{cases} \quad (4.6)$$

4.2 Existência de solução

No resultado seguinte estabelece-se a existência e unicidade da solução de (4.6).

Proposição 4.2. Para Δt suficiente pequeno, a solução de (4.6) existe e é única.

Dem: Observa-se que o sistema (4.6) admite a seguinte representação

$$[\rho I_{N-1} - (\alpha_1 \Delta t^2 + \alpha_2 \Delta t) A] u_h^{n+1} = F(u_h^n, u_h^{n-1}) \quad (4.7)$$

em que A representa a matriz tridiagonal associada ao operador $D_{2,x}$, tal como em (3.14), e $F(u_h^n, u_h^{n-1})$ definido de modo conveniente.

Observa-se que para cada vetor de entradas $h = [h_i]_{1 \leq i \leq N}$ e qualquer que seja a norma $\|\cdot\|$ em \mathbb{R}^{N-1} existe $C > 0$ tal que $\|A\| \leq C$. Logo, para Δt suficientemente pequeno, $\frac{\Delta t}{\rho} (\alpha_1 \Delta t + \alpha_2) \|A\| \leq 1$. Assim conclui-se que $\rho I_{N-1} - (\alpha_1 \Delta t^2 + \alpha_2 \Delta t) A$ é invertível e, portanto, para $0 \leq n \leq M$, a solução de (4.6) existe e é única. □

4.3 Estabilidade

Começa-se esta secção introduzindo a versão discreta do resultado de energia conhecido do caso contínuo.

Proposição 4.3. Seja u_h solução do problema (4.1) no sentido da definição de solução considerada e seja $\Delta t_{max} \geq \Delta t > 0$. Então para $1 \leq n \leq M$

$$\begin{aligned} & \rho \|D_{-t} u_h^n\|_h^2 + \alpha_1 \|D_{-x} u_h^n\|_+^2 + 2\Delta t \alpha_2 \sum_{j=2}^n \|D_{-x} D_{-t} U^j\|_+^2 \\ & \leq \rho \|\psi_h\|_h^2 + 2\alpha_1 (\Delta t_{max}^2 \|D_{-x} \psi_h\|_+^2 + \|D_{-x} \phi_h\|_+^2) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dem: Da equação diferencial de (4.6) tem-se para $1 \leq n \leq M-1$

$$\rho (D_{2,t} u_h^n, D_{-t} u_h^{n+1})_h = \alpha_1 (D_{2,x} u_h^{n+1}, D_{-t} u_h^{n+1})_h + \alpha_2 (D_{2,x} D_{-t} u_h^{n+1}, D_{-t} u_h^{n+1})_h \quad (4.9)$$

Considerando agora a Proposição 4.1 vem para $1 \leq n \leq M-1$

$$\rho \frac{\|D_{-t}u_h^{n+1}\|_h^2 - \|D_{-t}u_h^n\|_h^2}{2\Delta t} \leq \alpha_1 \frac{\|D_{-x}u_h^n\|_+^2 - \|D_{-x}u_h^{n+1}\|_+^2}{2\Delta t} - \alpha_2 \|D_{-x}D_{-t}u_h^{n+1}\|_+^2, \quad (4.10)$$

ou seja,

$$\rho \|D_{-t}u_h^{n+1}\|_h^2 + \alpha_1 \|D_{-x}u_h^{n+1}\|_+^2 + 2\Delta t \alpha_2 \|D_{-x}D_{-t}u_h^{n+1}\|_+^2 \leq \rho \|D_{-t}u_h^n\|_h^2 + \alpha_1 \|D_{-x}u_h^n\|_+^2. \quad (4.11)$$

A desigualdade anterior permite concluir

$$\rho \|D_{-t}u_h^n\|_h^2 + \alpha_1 \|D_{-x}u_h^n\|_+^2 + 2\Delta t \alpha_2 \sum_{j=2}^n \|D_{-x}D_{-t}u_h^j\|_+^2 \leq \rho \|D_{-t}U^1\|_h^2 + \alpha_1 \|D_{-x}U^1\|_+^2 \quad (4.12)$$

Considerando a expressão (4.5) e a desigualdade de Young obtém-se (4.8). □

O resultado anterior e a desigualdade de Poincaré-Friedrichs permitem estabelecer um majorante relativamente à norma $\|\cdot\|_{1,h}$ para a solução de (4.6).

Corolário 4.1. *Seja $u_h^n, 0 \leq n \leq M$, solução de (4.6). Nas condições da Proposição 4.3, existe uma constante C_E , independente de h e Δt , tal que*

$$\|u_h^n\|_{1,h}^2 \leq C_E (\|\psi_h\|_{1,h}^2 + \|\phi_h\|_{1,h}^2), \quad 0 \leq n \leq M. \quad (4.13)$$

O conceito de estabilidade, no caso discreto no tempo, está associado à propagação de perturbações dos dados iniciais. Intuitivamente, a solução discreta de (4.6) diz-se estável se "pequenas perturbações" nos dados iniciais induzem pequenas perturbações na solução. Na definição seguinte formaliza-se o conceito anterior.

Definição 4.1. *O problema (4.6), ou a sua solução, diz-se estável se*

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \tilde{\phi}_h \in \{p_h : \|p_h - \phi_h\|_{1,h} < \delta\}, \forall \tilde{\psi}_h \in \{q_h : \|q_h - \psi_h\|_{1,h} < \delta\} \\ \implies \|u_h^n - \tilde{u}_h^n\|_{1,h} < \varepsilon, 0 \leq n \leq M. \end{aligned} \quad (4.14)$$

É claro que a partir do Corolário 4.1, pode-se de imediato concluir que o sistema (4.1) é estável. De facto, ao considerar-se duas soluções de (4.1), u_h^n e \tilde{u}_h^n , com condições definidas por funções de rede ϕ_h, ψ_h e $\tilde{\phi}_h$ e $\tilde{\psi}_h$, então, pelo Corolário 4.1, conclui-se

$$\|u_h^n - \tilde{u}_h^n\|_{1,h}^2 \leq C_E (\|\psi_h - \tilde{\psi}_h\|_{1,h}^2 + \|\phi_h - \tilde{\phi}_h\|_{1,h}^2), \quad 0 \leq n \leq M.$$

Logo, para ε positivo pode-se garantir a existência de $\delta > 0$ verificando a Definição 4.1.

4.4 Convergência

Neste secção pretende-se estabelecer uma estimativa para o erro global, relativamente à norma $\|\cdot\|_{1,h}$, da aproximação discreta u_h^n definida por (4.6). Inicia-se esta secção com a construção do sistema discreto para o erro da aproximação u_h^n que depende do erro de truncatura.

Seja E_h^n o erro global definido por $E_h^n(x_i) = u(x_i, t_n) - u_h^n(x_i)$, $0 \leq i \leq N$, $0 \leq n \leq M$. Note-se que o erro global é solução do seguinte problema discreto

$$\begin{cases} \rho D_{2,t} E_h^n = \alpha_1 D_{2,x} E_h^{n+1} + \alpha_2 D_{2,x} D_{-t} E_h^{n+1} + T_h^n, & 1 \leq n \leq M-1 \\ E_h^n(x_0) = E_h^n(x_N) = 0, & 1 \leq n \leq M \\ E_h^0 = \phi - \phi_h \\ D_t E_h^0 = \psi - \psi_h \end{cases} \quad (4.15)$$

em que T_h^n denota o correspondente erro de truncatura.

Para o estudo do erro de convergência é primeiro necessário conhecer uma expressão para o erro de truncatura e tentar encontrar um majorante para este.

Proposição 4.4. *Seja $u \in C^4([0, a] \times [0, T])$ solução de (1.1). Então o erro de truncatura t_{nh} admite a seguinte representação*

$$T_h^n(x_i) = -\frac{h_{i+1} - h_i}{3} \left(\alpha_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_n) + \alpha_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t}(\xi_i, \eta_n) \right) + T_R(x_i, t_n), \quad (4.16)$$

em que $1 \leq i \leq N-1$, $1 \leq n \leq M-1$ e $\xi_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ e $\eta_n \in [t_{n-1}, t_{n+1}]$ e

$$|T_R(x_i, t_n)| \leq C(\Delta t + h_{max}^2) \|u\|_{C^4}, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq n \leq M-1, \quad (4.17)$$

para alguma constante positiva C independente de h e Δt .

Dem: De facto, considerando a formula de Taylor, para $1 \leq i \leq N-1$ e $1 \leq n \leq M-1$ tem-se

$$\begin{aligned} T_h^n(x_i) &= \rho \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \eta_n) + \alpha_2 \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}(\xi_i, \eta_n) \\ &\quad - \frac{h_{i+1} - h_i}{3} \left(\alpha_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_n) + \alpha_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t}(\xi_i, \eta_n) \right) - \alpha_1 \frac{h_{i+1}^2 - h_{i+1}h_i + h_i^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_n) \end{aligned} \quad (4.18)$$

em que $\xi_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ e $\eta_n \in [t_{n-1}, t_{n+1}]$ e

$$\begin{aligned} |T_R(x_i, t_n)| &= \left| \rho \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_i, \eta_n) + \alpha_2 \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}(\xi_i, \eta_n) - \alpha_1 \frac{h_{i+1}^2 - h_{i+1}h_i + h_i^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, t_n) \right| \\ &\leq \left(\frac{\rho \Delta t_{max}}{12} + \frac{\alpha_2}{2} \right) \Delta t \|u\|_{C^4} + \frac{\alpha_1}{12} h_{max}^2 \|u\|_{C^4} \leq \max \left\{ \frac{\rho \Delta t_{max}}{12} + \frac{\alpha_2}{2}, \frac{\alpha_1}{12} \right\} (\Delta t + h_{max}^2) \|u\|_{C^4} \end{aligned} \quad (4.19)$$

□

Proposição 4.5. Se $u \in C^5([0, a] \times [0, T])$ solução de (1.1). Então existe $L > 0$, independente de h e Δt , tal que

$$\|D_{-t}E_h^n\|_h^2 + \|D_{-x}E_h^n\|_+^2 + \sum_{j=2}^n \|D_{-x}D_{-t}E_h^j\|_+^2 \leq L(\|\phi - \phi_h\|_{1,h}^2 + \|\psi - \psi_h\|_{1,h}^2 + (\Delta t^2 + h_{\max}^4)\|u\|_{C^5}^2) \quad (4.20)$$

para $1 \leq n \leq M$.

Dem: Seguindo a demonstração da Proposição 4.3, pode-se provar que se tem

$$\begin{aligned} & \rho \|D_{-t}E_h^n\|_h^2 + \alpha_1 \|D_{-x}E_h^n\|_+^2 + 2\Delta t \alpha_2 \sum_{j=2}^n \|D_{-x}D_{-t}E_h^j\|_+^2 \\ & \leq \rho \|\psi - \psi_h\|_h^2 + 2\alpha_1 (\Delta t_{\max}^2 \|D_{-x}(\psi - \psi_h)\|_+^2 + \|D_{-x}(\phi - \phi_h)\|_+^2) + 2\Delta t \sum_{j=2}^n (T_h^j, D_{-t}E_h^j)_h. \end{aligned} \quad (4.21)$$

para $1 \leq n \leq M$.

Note-se que no que se segue utiliza-se a seguinte notação: $T_h^n = T_1^n + T_2^n + T_R$, para $1 \leq n \leq M-1$, em que

$$T_1^n = -\alpha_1 \frac{h_{i+1} - h_i}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_n) \quad e \quad T_2^n = -\alpha_2 \frac{h_{i+1} - h_i}{3} \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t}(\xi_i, \eta_n).$$

Assim $(T_h^n, D_{-t}E_h^{n+1})_h = \sum_{k=1,2} (T_k^n, D_{-t}E_h^{n+1})_h + (T_R, D_{-t}E_h^{n+1})_h$. Seguidamente analisa-se o termo $(T_1^n, D_{-t}E_h^{n+1})_h$. Tem-se, sucessivamente,

$$\begin{aligned} (T_1^n, D_{-t}E_h^{n+1})_h &= -\alpha_1 \sum_{i=1}^{N-1} \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_n) D_{-t}E_h^{n+1}(x_i) \\ &= -\alpha_1 \sum_{i=1}^N \frac{h_i^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_{i-1}, t_n) D_{-t}E_h^{n+1}(x_{i-1}) + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_n) D_{-t}E_h^{n+1}(x_i) \right) \\ &= -\alpha_1 \sum_{i=1}^N \frac{h_i^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_{i-1}, t_n) \frac{D_{-t}E_h^{n+1}(x_{i-1}) - D_{-t}E_h^{n+1}(x_i)}{h_i} h_i - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_{i-1}, t_n) - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_n) \right) D_{-t}E_h^{n+1}(x_i) \right) \\ &= \alpha_1 \sum_{i=1}^N \frac{h_i^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_{i-1}, t_n) D_{-x}D_{-t}E_h^{n+1}(x_i) + \alpha_1 \sum_{i=1}^N \frac{h_i^2}{6} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t_n) D_{-t}E_h^{n+1}(x_i) dx. \end{aligned} \quad (4.22)$$

e

$$\begin{aligned}
|(T_1^n, D_{-t}E_h^{n+1})_h| &\leq \frac{1}{6}\|u\|_{C^3} \sum_{i=1}^N h_i^3 |D_{-x}D_{-t}E_h^{n+1}(x_i)| + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N h_i^2 \sqrt{\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t_n)|^2 dx} \sqrt{h_i} |D_{-t}E_h^{n+1}(x_i)| \\
&\leq \frac{1}{6}\|u\|_{C^3} \sqrt{\sum_{i=1}^N h_i^4 h_i} \sqrt{\sum_{i=1}^N h_i [D_{-x}D_{-t}E_h^{n+1}(x_i)]^2} + \frac{1}{6} \sqrt{\sum_{i=1}^N h_i^4 \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t_n)|^2 dx} \sqrt{\sum_{i=1}^N h_i [D_{-t}E_h^{n+1}(x_i)]^2} \\
&\leq \frac{1}{6}\|u\|_{C^3} h_{\max}^2 \sqrt{a} \|D_{-x}D_{-t}E_h^{n+1}\|_+ + \frac{\sqrt{2}}{6}\|u\|_{C^4} h_{\max}^2 \sqrt{a} \|D_{-t}E_h^{n+1}\|_h.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Uma vez que para $(T_2^n, D_{-t}E_h^{n+1})_h$ se tem uma representação análoga, obtém-se

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1,2} (T_k^n, D_{-t}E_h^{n+1})_h &\leq \frac{1}{6} (\alpha_1 \|u\|_{C^3} + \alpha_2 \|u\|_{C^4}) h_{\max}^2 \sqrt{a} \|D_{-x}D_{-t}E_h^{n+1}\|_+ \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\alpha_1}{2} \|u\|_{C^4} + \alpha_2 \|u\|_{C^5} \right) h_{\max}^2 \sqrt{a} \|D_{-t}E_h^{n+1}\|_h.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Por outro lado, tem-se também

$$(T_R, D_{-t}E_h^{n+1})_h \leq \|T_R\|_h \|D_{-t}E_h^{n+1}\|_h \leq C(\Delta t + h_{\max}^2) \|u\|_{C^4} \sqrt{a} \|D_{-t}E_h^{n+1}\|_h. \tag{4.25}$$

Conjugando as estimativas anteriores, obtemos, sucessivamente,

$$\begin{aligned}
(T_h^n, D_{-t}E_h^{n+1})_h &\leq \frac{1}{6} (\alpha_1 \|u\|_{C^3} + \alpha_2 \|u\|_{C^4}) h_{\max}^2 \sqrt{a} \|D_{-x}D_{-t}E_h^{n+1}\|_+ \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\alpha_1}{2} \|u\|_{C^4} + \alpha_2 \|u\|_{C^5} \right) h_{\max}^2 \sqrt{a} \|D_{-t}E_h^{n+1}\|_h + C(\Delta t + h_{\max}^2) \|u\|_{C^4} \sqrt{a} \|D_{-t}E_h^{n+1}\|_h \\
&\leq \frac{a}{4\varepsilon} h_{\max}^4 \left(\frac{\alpha_1^2}{36} \|u\|_{C^3}^2 + \frac{\alpha_2^2}{36} \|u\|_{C^4}^2 + \frac{\alpha_1^2}{18} \|u\|_{C^4}^2 + \frac{2\alpha_2^2}{9} \|u'(t)\|_{C^5}^2 + C^2 \|u\|_{C^4}^2 \right) + \frac{a}{4\varepsilon} C^2 \Delta t^2 \|u\|_{C^4}^2 \\
&\quad + 4\varepsilon (\|D_{-x}D_{-t}E_h^{n+1}\|_+^2 + 2\|D_{-t}E_h^{n+1}\|_h^2),
\end{aligned} \tag{4.26}$$

em que $\varepsilon > 0$ é uma constante arbitrária, ou seja, existe uma constante positiva C_1 tal que

$$(T_h^{n+1}, D_{-t}E_h^{n+1})_h \leq C_1 (h_{\max}^4 + \Delta t^2) \|u\|_{C^5}^2 + 4\varepsilon (\|D_{-x}D_{-t}E_h^{n+1}\|_+^2 + 2\|D_{-t}E_h^{n+1}\|_h^2). \tag{4.27}$$

Assim, deduz-se que

$$\sum_{j=2}^n (T_h^j, D_{-t}E_h^j)_h \leq C_1 (n-1) (h_{\max}^4 + \Delta t^2) \|u\|_{C^5}^2 + 4\varepsilon \sum_{j=2}^n \|D_{-x}D_{-t}E_h^j\|_+^2 + 8\varepsilon \sum_{j=2}^n \|D_{-t}E_h^j\|_h^2. \tag{4.28}$$

Considerando em (4.21) a estimativa (4.28), para $1 \leq n \leq M$ tem-se

$$\begin{aligned}
& \rho \|D_{-t}E_h^n\|_h^2 + \alpha_1 \|D_{-x}E_h^n\|_+^2 + 2\Delta t(\alpha_2 - 4\varepsilon) \sum_{j=2}^n \|D_{-x}D_{-t}E_h^j\|_+^2 \\
& \leq \rho \|\psi - \psi_h\|_h^2 + 2\alpha_1(\Delta t_{\max}^2 \|D_{-x}(\psi - \psi_h)\|_+^2 + \|D_{-x}(\phi - \phi_h)\|_+^2) \\
& \quad + 2\Delta t C_1(n-1)(h_{\max}^4 + \Delta t^2) \|u\|_{C^5}^2 + 16\Delta t \varepsilon \sum_{j=2}^n \|D_{-t}E_h^j\|_h^2.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Fixando em (4.29) a constante ε de modo conveniente, pode-se concluir a existência de uma constante positiva L , independente de h e de Δt , tal que, para $1 \leq n \leq M$,

$$\begin{aligned}
& \|D_{-t}E_h^n\|_h^2 + \|D_{-x}E_h^n\|_+^2 + \Delta t \sum_{j=2}^n \|D_{-x}D_{-t}E_h^j\|_+^2 \\
& \leq L \left(\|\psi - \psi_h\|_{1,h}^2 + \|\phi - \phi_h\|_{1,h}^2 + (h_{\max}^4 + \Delta t^2) \|u\|_{C^5}^2 + \sum_{j=2}^n \|D_{-t}E_h^j\|_h^2 \right).
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Considerando agora a versão discreta do lema de Grönwal 4.1, conclui-se a existência de uma constante positiva L , independente de h e de Δt , tal que se tem a estimativa (4.20). \square

Com base nos resultados anteriores pode-se agora concluir a convergência do método numérico.

Corolário 4.2. *Nas condições da Proposição 4.5, se $\phi_h(x_i) = \phi(x_i)$ e $\psi_h(x_i) = \psi(x_i)$, $0 \leq i \leq N$, então existe uma constante positiva L_1 , independente de h e de Δt , tal que, para $0 \leq n \leq M$,*

$$\|E_h^n\|_{1,h}^2 \leq L_1(h_{\max}^4 + \Delta t^2) \|u\|_{C^5}^2. \tag{4.31}$$

Tendo assim o método uma ordem de convergência quadrática.

Dem: Pelo Proposição 4.5, para $0 \leq n \leq M$ tem-se

$$\|D_{-x}E_h^n\|_+^2 \leq L(h_{\max}^4 + \Delta t^2) \|u\|_{C^5}^2 \tag{4.32}$$

Utilizando a desigualdade de Poincaré-Friedrichs discreta (3.2) vem de imediato o resultado pretendido. \square

O Corolário 4.2 estabelece a convergência quadrática no espaço e linear no tempo relativamente à norma $\|\cdot\|_{1,h}$, embora o erro de truncatura associado à discretização seja de 1ª ordem relativamente à norma $\|\cdot\|_{\infty}$.

Capítulo 5

Simulação numérica

O Presente capítulo pretende ilustrar o resultado de convergência (Corolário 4.2), bem como ilustrar o comportamento qualitativo de (1.1).

5.1 Convergência

Com o objetivo de ilustrar a estimativa do erro estabelecida no Corolário 4.2, considera-se (1.1) com um termo fonte f que é discretizado de forma implícita. Assim, o sistema (4.7) admite agora a seguinte representação

$$[\rho I_{N-1} - (\alpha_1 \Delta t^2 + \alpha_2 \Delta t)A]u_h^{n+1} = (2\rho I_{N-1} - \alpha_2 \Delta t A)u_h^n - \rho u_h^{n-1} + \Delta t^2 f^{n+1}, \quad (5.1)$$

em que $A = \text{tridiag}(\frac{2}{h_i(h_i+h_{i+1})}, -\frac{2}{h_i h_{i+1}}, \frac{2}{h_{i+1}(h_i+h_{i+1})})$.

A fim de ilustrar que a ordem de convergência no espaço é quadrática, tome-se $\Delta t \leq h_{\max}^2$. Pela desigualdade (4.31) tem-se

$$\|E_h^n\|_{1,h} \leq Lh_{\max}^2, \quad (5.2)$$

para alguma constante positiva L .

Sejam h e \tilde{h} dois vetores de entradas e sejam E_h^n e $E_{\tilde{h}}^n$ os correspondentes erros globais no nível temporal t_n . Então tem-se

$$\max_n \|E_h^n\|_{1,h} \leq Lh_{\max}^2 \quad e \quad \max_n \|E_{\tilde{h}}^n\|_{1,h} \leq L\tilde{h}_{\max}^2. \quad (5.3)$$

Seja p a ordem de convergência do método em estudo, então

$$\max_n \|D_{-x}E_h^n\|_+ \leq Lh_{\max}^p \quad e \quad \max_n \|D_{-x}E_{\tilde{h}}^n\|_+ \leq L\tilde{h}_{\max}^p. \quad (5.4)$$

Com o objetivo de estimar a ordem p , tome-se

$$E_h := \max_n \|D_{-x}E_h^n\|_+ \simeq Lh_{\max}^p \quad e \quad E_{\tilde{h}} := \max_n \|D_{-x}E_{\tilde{h}}^n\|_+ \simeq L\tilde{h}_{\max}^p. \quad (5.5)$$

Então

$$p = \ln \left(\frac{E_h}{E_{\tilde{h}}} \right) / \ln \left(\frac{h_{max}}{\tilde{h}_{max}} \right); \quad (5.6)$$

Considere-se (1.1) com termo fonte f tal que a sua solução é definida por

$$u(x,t) = e^t \sin \left(\frac{\pi}{a} x \right), \quad (x,t) \in [0,a] \times \mathbb{R}_0^+. \quad (5.7)$$

Neste caso tem-se

$$f(x,t) = \left[\rho + (\alpha_1 + \alpha_2) \left(\frac{\pi}{a} x \right)^2 \right] e^t \sin \left(\frac{\pi}{a} x \right), \quad (x,t) \in (0,a) \times \mathbb{R}^+ \quad (5.8)$$

e

$$\phi(x) = \sin \left(\frac{\pi}{a} x \right), \quad \psi(x) = \sin \left(\frac{\pi}{a} x \right), \quad x \in (0,a). \quad (5.9)$$

Para um primeiro estudo consideram-se os seguintes parâmetros:

a (m)	T (s)	Δt (s)	ρ (Kg/m ³)	α_1 (Pa)	α_2 (Pa s)
1.0	1.0	10 ⁻⁵	1.0	1.5	0.8

Tabela 5.1 Parâmetros para o estudo da convergência

A malha inicial é definida pelo vetor $h = [0.3 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.1]^T$ e as malhas não uniformes seguintes são definidas introduzindo em cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ o ponto médio

Na figura 5.1 ilustra-se o comportamento da solução u definida por (5.7) e da solução numérica definida por (5.1) no instante T para 5 malhas não uniformes definidas como anteriormente mencionado. Onde se observa uma boa concordância entre as duas soluções.

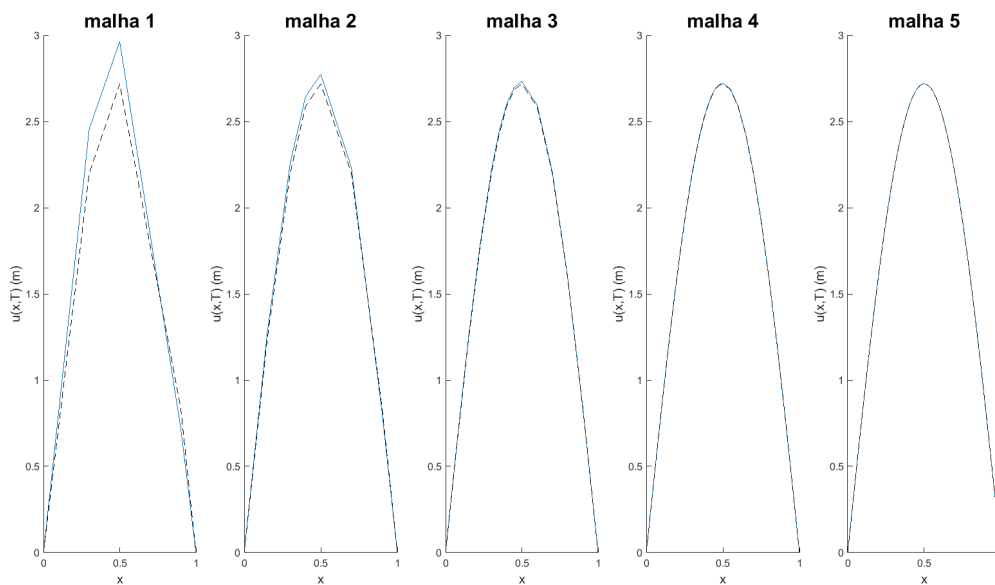


Fig. 5.1 Gráfico da solução exata (- -) e solução numérica (—) para cada malha não uniforme espacial

A fim de ilustrar o resultado de convergência presente no Corolário 4.2, na tabela 5.1 apresentam-se as estimativas para a ordem de convergência definida por (5.6) e obtidas com as redes não uniformes definidas anteriormente.

malha	h_{max}	E_h	p
1	0.4	6.1915×10^{-1}	-
-	-	-	1.9978
2	0.2	1.5502×10^{-1}	-
-	-	-	2.0001
3	0.1	3.8753×10^{-2}	-
-	-	-	1.9994
4	0.05	9.6926×10^{-3}	-
-	-	-	1.9971
5	0.025	2.4280×10^{-3}	-

Tabela 5.2 Ordem de convergência obtida numericamente

Os resultados apresentados ilustram a convergência quadrática no espaço relativamente à norma $\|\cdot\|_{1,h}$.

5.2 Comportamento qualitativo

Seguidamente fez-se um segundo estudo para analisar a influência dos parâmetros e das condições iniciais na solução numérica, considerando-se o método discreto original (4.7). Para o estudo vai-se avaliar o comportamento da solução de (4.7) para várias velocidades iniciais e para vários valores dos parâmetros T , ρ , α_1 e α_2 , utilizando-se parâmetros iniciais semelhantes aos que se encontram nas propriedades físicas dos tecidos de um fígado humano, [6].

a (m)	T (s)	Δt (s)	ρ (Kg/m ³)	α_1 (Pa)	α_2 (Pa·s)
1.0	10.0	10^{-4}	1050.0	2060.0	1.72

Tabela 5.3 Parâmetros para o estudo do comportamento qualitativo

Bem como a seguinte malha não uniforme

$$h = [0.075 \ 0.075 \ 0.075 \ 0.075 \ 0.050 \ 0.050 \ 0.050 \ 0.050 \ 0.100 \ 0.100 \ 0.100 \ 0.100 \ 0.025 \ 0.025 \ 0.025 \ 0.025]^T$$

e posição inicial

$$\phi(x) = \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right), \quad x \in (0, a)$$

Começou-se por analisar as alterações no comportamento da solução provocadas pela velocidade inicial ψ . Na figura 5.2 ilustra-se o comportamento da solução numérica definida por (4.7) para $T = 10s$ no caso das velocidades iniciais escolhidas.

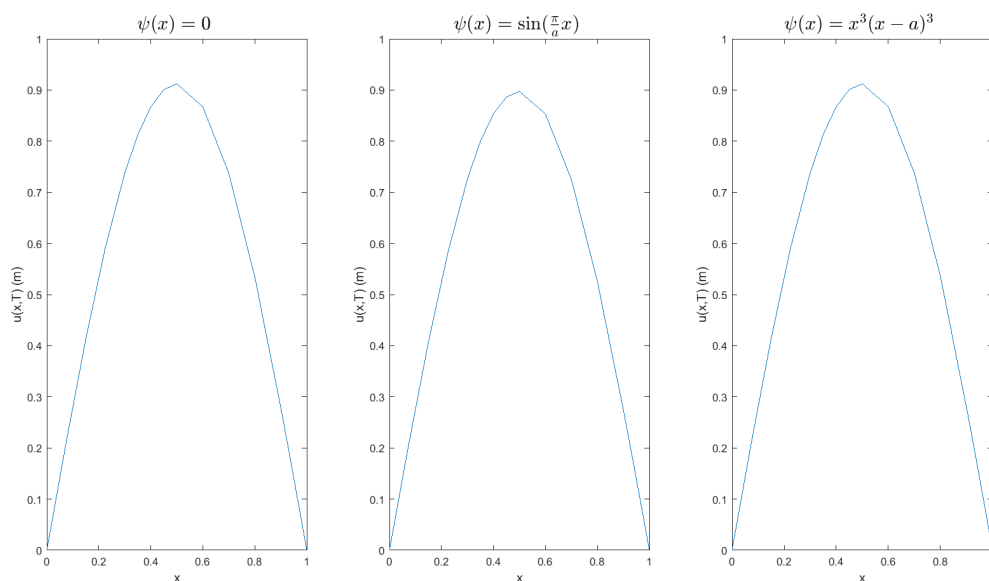


Fig. 5.2 Gráfico da solução numérica para cada velocidade inicial

Observou-se que, para as velocidades iniciais escolhidas, o comportamento da solução é análogo. Pelo que para as restantes análises escolheu-se a velocidade inicial nula, $\psi(x) = 0$, $x \in (0, a)$.

A seguir, estudou-se o comportamento da solução de (4.7) quando se varia o valor de T . Na figura 5.3 explicita-se o comportamento da solução para $T = 4, 6, 7, 10, 13$ s.

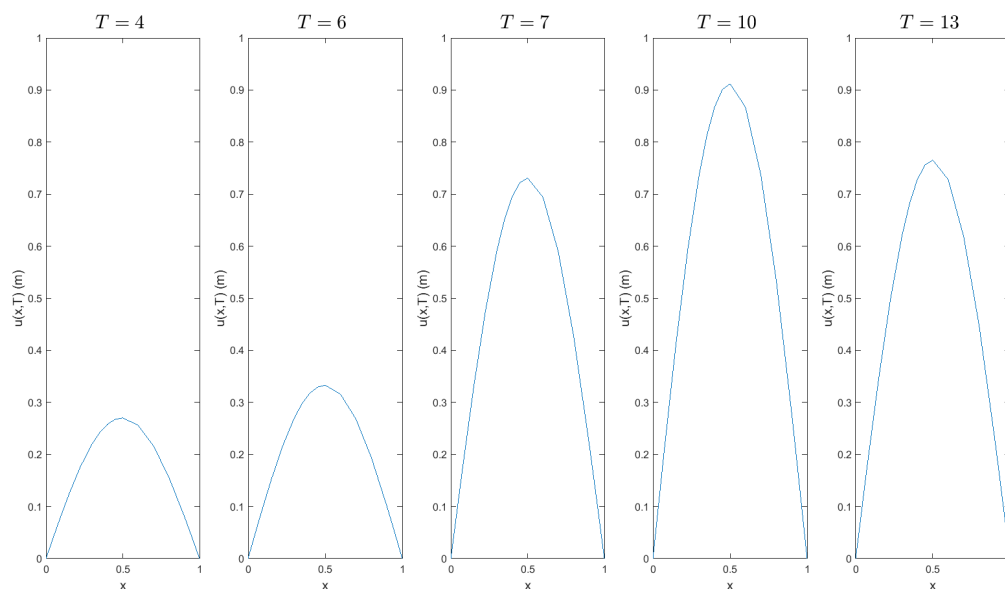


Fig. 5.3 Gráfico da solução numérica para $T = 4, 6, 7, 10, 13$ s

No caso do comportamento da solução provocado pela variação de T , nota-se grandes alterações mostrando que a solução final tem uma grande dependência do limite temporal. Com mais exemplos, consegue-se ainda encontrar uma espécie de padrão em que a solução para T no intervalo $[4 + 10k, 13 + 10k]$, $k \in \mathbf{N}_0$ tem um comportamento semelhante ao observado na figura 5.3.

Posteriormente, analisou-se a influência de ρ no comportamento da solução. Na figura 5.4 ilustra-se esta solução para $\rho = 1000, 1025, 1050, 1075, 1100 \text{ Kg/m}^3$. Observa-se que, inicialmente, o aumento de ρ provoca um crescimento na solução mas este crescimento começa a estagnar para valores próximos de $\rho = 1050 \text{ Kg/m}^3$, para valores superiores nota-se um pequeno decrescer.

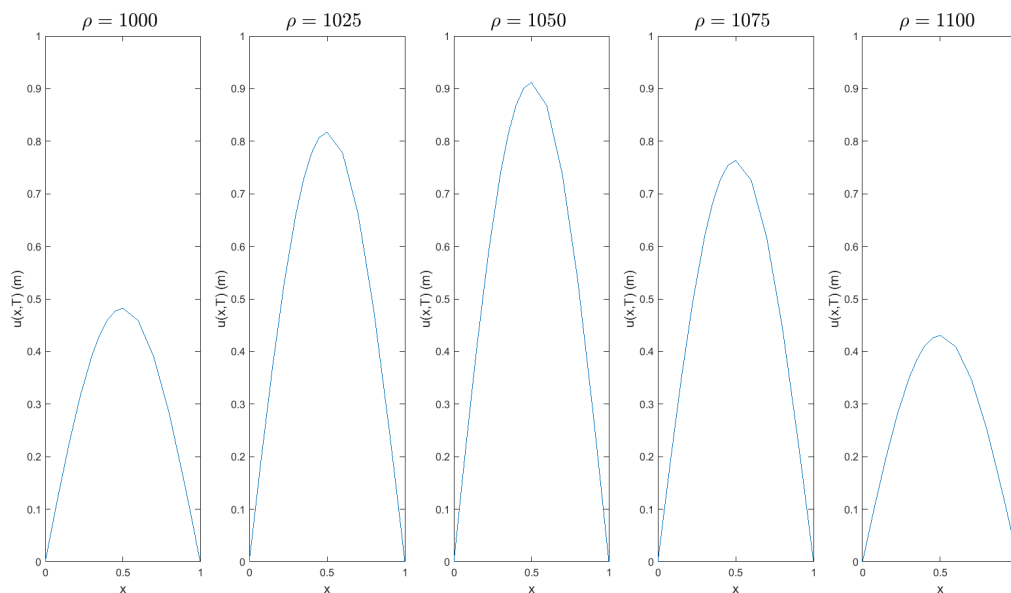


Fig. 5.4 Gráfico da solução numérica para $\rho = 1000, 1025, 1050, 1075, 1100 \text{ Kg/m}^3$

De seguida, analisou-se a influência de α_1 no comportamento da solução. Na figura 5.5 ilustra-se esta solução para $\alpha_1 = 1950, 2000, 2060, 2100, 2150 \text{ Pa}$.

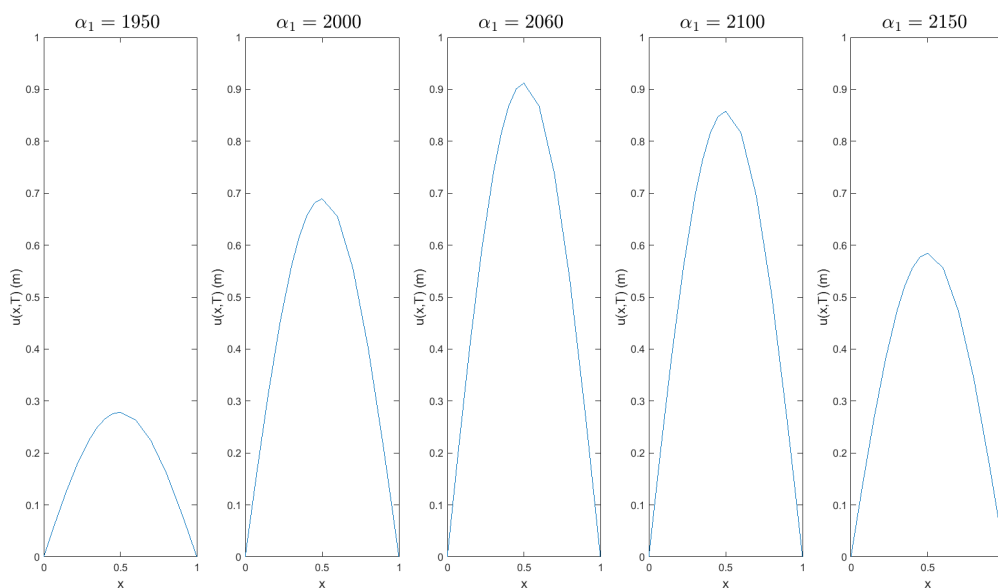


Fig. 5.5 Gráfico da solução numérica para $\alpha_1 = 1950, 2000, 2060, 2100, 2150 \text{ Pa}$

Constata-se que, inicialmente, o aumento de α_1 provoca um grande crescimento na solução mas este crescimento começa a estagnar para valores próximos de $\alpha_1 = 2060 \text{ Pa}$, para valores superiores nota-se um pequeno decrescer.

Por último, estudou-se o comportamento da solução perante a variação do valor de α_2 . Na figura 5.4 ilustra-se esta solução para $\alpha_2 = 0.50, 1.00, 1.72, 2.50, 3.00 \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

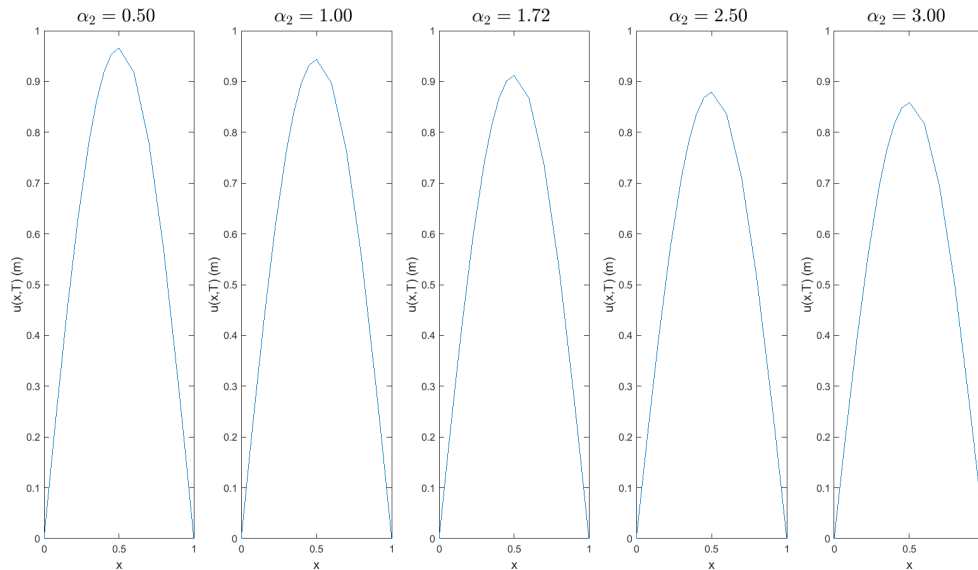


Fig. 5.6 Gráfico da solução numérica para $\alpha_2 = 0.50, 1.00, 1.72, 2.50, 3.00 \text{ Pa} \cdot \text{s}$

Note-se que o aumento do valor de α_2 provoca o decrescimento da solução. O que seria de esperar visto que α_2 diz respeito ao coeficiente de viscosidade do meio, quanto mais viscoso for este menores serão os deslocamentos provocados pela onda.

Conclui-se que pequenas variações nos parâmetros iniciais provocam alterações severas nos resultados.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho foi objeto de estudo o problema de condições iniciais e de fronteira (1.1). Estabeleceram-se hipóteses sobre as condições iniciais que permitiram concluir que o problema mencionado é bem posto no sentido de Hadamard.

Do ponto de vista analítico, iniciou-se este trabalho com a construção de uma solução utilizando o método de separação de variáveis e, em seguida, introduziu-se um conceito de energia para o qual se provou um princípio de conservação de energia. Este resultado permitiu concluir a unicidade de solução e provar a estabilidade de (1.1).

Do ponto de vista numérico, construiu-se, primeiramente, um método numérico semi-discreto que permitiu construir uma aproximação para a solução do problema de condições iniciais e de fronteira (1.1). Para o problema semi-discreto definido por (3.12) provou-se a existência, unicidade e estabilidade da solução e estudou-se a convergência desta aproximação, tendo-se concluído a convergência quadrática relativamente à norma $\|\cdot\|_{1,h}$.

Posteriormente, introduziu-se um método discreto no espaço no tempo definido por (4.6). Para este novo método mostrou-se a existência unicidade de solução, estabilidade e a convergência quadrática no espaço e linear no tempo relativamente à norma $\|\cdot\|_{1,h}$.

Os resultados teóricos foram ilustrados numericamente no capítulo 5.

A concluir este trabalho, é importante realçar alguns aspetos que poderiam ser estudados no âmbito desta investigação. A primeira questão que poderia ser objeto de estudo é a generalização do resultado aqui apresentado quando se considera (1.1) copulado com a equação da concentração em que a velocidade convectiva depende da velocidade do deslocamento, $v = v(\frac{\partial u}{\partial t})$.

Outras questões poderão ser objetos de investigação futura, nomeadamente, a substituição do modelo viscoelástico utilizado (1.20) por outros modelos de modo a poder construir uma ferramenta que permita estudar a propagação de ultrassons em diferentes tecidos.

Por último, salienta-se que em (1.1) foram consideradas condições de Dirichlet homogéneas. Estas condições são válidas apenas se o domínio espacial é suficientemente grande para que o comportamento na fronteira não influencie os fenómenos que se está a estudar. Pretende-se considerar posteriormente condições que parecem mais realistas- condições de Neumann ou condições de Robin.

Bibliografia

- [1] Bakhtiari-Nejad, M. and Shahab, S. (2019). Effects of nonlinear propagation of focused ultrasound on the stable cavitation of a single bubble. *Acoustics*, 1(1):14–34.
- [2] Barbeiro, S., Ferreira, J., and Grigorieff, R. (2005). Supraconvergence of a finite difference scheme for solutions in $h^s(0, 1)$. *IMA journal of numerical analysis*, 25(4):797–811.
- [3] Boissenot, T., Bordat, A., Fattal, E., and Tsapis, N. (2016). Ultrasound-triggered drug delivery for cancer treatment using drug delivery systems: From theoretical considerations to practical applications. *Journal of Controlled Release*, 241:144–163.
- [4] Branco, J. and Ferreira, J. (2008). A singular perturbation of the heat equation with memory. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 218(2):376–394.
- [5] Brinson, H. F., Brinson, L. C., et al. (2008). Polymer engineering science and viscoelasticity: An introduction. *Springer*.
- [6] Chen, S., Urban, M. W., Pislaru, C., Kinnick, R., Zheng, Y., Yao, A., and Greenleaf, J. F. (2009). Shearwave dispersion ultrasound vibrometry (sduv) for measuring tissue elasticity and viscosity. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 56(1):55–62.
- [7] Chu, S. and Metcalf, F. (1967). On Gronwall's inequality. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 18(3):439–440.
- [8] Ferreira, J. and Grigorieff, R. (2006). Supraconvergence and supercloseness of a scheme for elliptic equations on nonuniform grids. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 27(5-6):539–564.
- [9] Ferreira, J., Jordão, D., and Pinto, L. (2022). Drug delivery enhanced by ultrasound: Mathematical modeling and simulation. *Computers Mathematics with Applications*, 107:57–69.
- [10] Ferreira, J. A. and Grigorieff, R. D. (1998). On the supraconvergence of elliptic finite difference schemes. *Applied numerical mathematics*, 28(2-4):275–292.
- [11] Jafarian Dehkordi, F., Shakeri-Zadeh, A., Khoei, S., Ghadiri, H., and Shiran, M.-B. (2013). Thermal distribution of ultrasound waves in prostate tumor: comparison of computational modeling with in vivo experiments. *International Scholarly Research Notices*, 2013.
- [12] Jordão, D. S. D. (2020). *Coupling Hyperbolic and Parabolic IBVP: Applications to Drug Delivery*. PhD thesis, Universidade de Coimbra.
- [13] Kyriakou, A., Neufeld, E., Werner, B., Székely, G., and Kuster, N. (2015). Full-wave acoustic and thermal modeling of transcranial ultrasound propagation and investigation of skull-induced aberration correction techniques: a feasibility study. *Journal of Therapeutic Ultrasound*, 3(1):1–18.
- [14] Zhang, N.-Y. (1993). On fully discrete galerkin approximations for partial integro-differential equations of parabolic type. *Mathematics of Computation*, 60(201):133–166.

- [15] Zhang, W., Capilnasiu, A., and Nordsletten, D. (2021). Comparative analysis of nonlinear viscoelastic models across common biomechanical experiments. *Journal of Elasticity*, 145(1-2):1–36.
- [16] Zhang, W., Chen, H. Y., and Kassab, G. S. (2007). A rate-insensitive linear viscoelastic model for soft tissues. *Biomaterials*, 28(24):3579–3586.

Anexo A

Código *Matlab*

```
1 close all; clear; clc;
2
3 % problema discreto
4 % d D_2t U^n_i = a1 U^n+1_i + a2 U^n+1_i + f^n+1_i
5 % U^n_0=U^n_N=0
6 % U^0_i= u0
7 % D_-t U^1_n=uv0
8
9 % entradas
10 h=[0.3 0.2 0.4 0.1]'; % entrada espacial nao uniforme inicial
11 %h=0.1*ones(10,1); % entrada espacial uniforme inicial
12 dt=0.00001; % entrada temporal
13
14 % limites
15 X=1; % a
16 T=1;
17
18 t=0:dt:T; % particao temporal
19
20 % constantes
21 a1=1.5; % alpha_1
22 a2=0.8; % alpha_2
23 d=1; % rho
24
25 % funcoes dadas
26 u0 = @(x) sin(x.*(pi/X)); % posicao inicial
27 uv0 = @(x) sin(x.*(pi/X)); % velocidade inicial
28 f = @(x,t) (d+(a1+a2)*(pi/X)^2).*exp(t).*sin(x.*(pi/X)); % funcao controle
29 u = @(x,t) exp(t).*sin(x.*(pi/X)); % solucao exata
30
31 it=5; % numero iteracoes maximo do metodo
32
33 erros=zeros(it,1); % vetor dos erros por iteracao
34
35 hmax=zeros(it,1); % vetor dos h maximos por iteracao
36
37 k=1; % inicializar iteracoes
```

```

38
39 while (k<it & dt^2<norm(h,inf)^4) % condicao necessaria de convergencia ...
    espacial
40
41     N=length(h);
42     M=round(T/dt);
43
44     % particao espacial nao uniforme
45     x=zeros(N+1,1);
46     for i=2:N+1
47         x(i)=x(i-1)+h(i-1);
48     end
49
50     U=zeros(N+1,M+1); % matriz U (solucoes)
51
52     % condicoes iniciais
53     U(:,1)=u0(x(:));
54     U(:,2)=u0(x(:))+dt.*uv0(x(:));
55
56     % matrizes do metodo
57     I=eye(N-1);
58     A = spdiags([2./(h(2:N).* (h(1:N-1)+h(2:N))) -2./((h(1:N-1).*h(2:N))) ...
59                 2./(h(1:N-1).* (h(1:N-1)+h(2:N)))], -1:1, N-1, N-1)';
60
61     % metodo recursivo matricial
62     for m=2:M
63         F=f(x(2:N),t(m+1));
64         U(2:N,m+1) = (d*I - a1*dt*dt*A - a2*dt*A)\((2*d*I- ...
65             a2*dt*A)*U(2:N,m) - d*U(2:N,m-1)+dt.*dt.*F);
66     end
67
68     % grafico
69     txt = ['j = ',num2str(k)]; % legenda
70     subplot(1,it,k)
71     hold on
72     title(txt, 'FontSize', 18) % titulo grafico
73     plot(x,U(:,M+1)) % grafico solucao numerica
74     plot(x,u(x,T),'k--') % grafico solucao exata
75     xlabel('x', 'FontSize', 12); % eixo x
76     ylabel('u(x,T) (m)', 'FontSize', 12); % eixo y
77     hold off
78
79     % erro da iteracao: max_n || D_-x E^n ||_+
80     e=zeros(M+1,1);
81     for j=1:M+1
82         for i=2:N+1
83             e(j)=e(j)+(u(x(i),t(j))-U(i,j)-u(x(i-1),t(j))+U(i-1,j))^2/h(i-1);
84         end
85     end
86     e(j)=sqrt(e(j))
87
88     erros(k)=norm(e,inf);

```



```
87
88     hmax(k)=norm(h,inf);
89
90     % novas entradas espaciais
91     h1=zeros(2*N-1,1);
92     for i=1:length(h)
93         h1(2*i)=h(i)/2;
94         h1(2*i-1)=h(i)/2;
95     end
96     h=h1;
97
98     k=k+1;
99 end
100
101 % calculo da ordem de convergencia espacial (≠4)
102 p=zeros(it-1,1);
103 for i=1:it-1
104     p(i)=log(eros(i)./eros(i+1))./log(hmax(i)./hmax(i+1));
105 end
106
107 % resultados
108 disp('      it          h_max          erros          p');
109 disp('-----');
110 for i=1:it
111     fprintf('      %i          %0.5f          %0.10f          - ...
112             \n',i,hmax(i),eros(i));
113     if(i<it)
114         fprintf('          -          -          -          %0.5f ...
115                 \n',p(i));
116     end
117 end
```