



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

João Paulo Ferreira Viegas

**DATA ENVELOPMENT ANALYSIS E TEORIA
MODERNA DO PORTFÓLIO NA CONSTRUÇÃO
DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTO**

**Dissertação no âmbito do Mestrado em Gestão orientada pelo
Professor Doutor Luís Miguel Cândido Dias e pelo Professor
Doutor Pedro Manuel Cortesão Godinho apresentada à Faculdade
de Economia**

Outubro de 2021

Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra

Data Envelopment Analysis e Teoria Moderna do Portfólio na Construção de Carteiras de Investimento

João Paulo Ferreira Viegas

Dissertação no âmbito do Mestrado em Gestão orientada pelo Professor Doutor Luís Miguel Cândido Dias e pelo Professor Doutor Pedro Manuel Cortesão Godinho apresentada à Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra.

Outubro de 2021



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Agradecimentos

A conclusão desta dissertação só foi possível devido à presença e colaboração de um conjunto de pessoas que foram essenciais e às quais eu agradeço.

Ao Professor Doutor Luís Miguel Cândido Dias e ao Professor Doutor Pedro Manuel Cortesão Godinho pelo seu acompanhamento, orientação e disponibilidade durante todo o processo inerente à realização do estudo.

Aos meus pais por me terem proporcionado todas as condições necessárias, pela educação e valores que me transmitiram e por nunca me terem deixado desistir.

À Alice pela amizade, positivismo, estabilidade, por estar sempre presente e pela ambição que me transmitiu.

Aos meus colegas da CISPAN Dra. Mariana Oliveira, Eng. António Domingues, Dra. Ana Lúcia Costa e Eng. Pedro Pereira, por todo o conhecimento que partilharam, pela paciência, incentivo constante e flexibilidade.

Resumo

Na construção de carteiras de investimento é comum o investidor deparar-se com o conflito entre risco e retorno. Assim, a escolha dos ativos em que se investe, bem como a decisão da proporção do investimento a alocar a cada ativo, envolve um *trade-off* entre minimizar o risco e maximizar o retorno. Harry Markowitz propôs a Teoria Moderna do Portfólio (TMP) de forma a ajudar o investidor racional na resolução neste problema. Recentemente, a metodologia *Data Envelopment Analysis* (DEA) também tem sido aplicada à construção de carteiras de investimento e os resultados são promissores em comparação com o investimento num índice de mercado.

Nesta dissertação são utilizadas as duas metodologias – DEA e TMP – na construção e otimização de carteiras de investimento, utilizando como *benchmark* o índice *Dow Jones Industrial Average* (DJI). São comparadas sete carteiras de investimento. Quatro dessas carteiras são construídas com base na metodologia DEA e utilizam o modelo clássico Banker, Charnes e Cooper (BCC) para selecionar os ativos considerados eficientes: uma dessas carteiras assume uma alocação de capital igual para todos os ativos selecionados, enquanto as outras são otimizadas com base nos modelos média-variância e média-semivariância (considerando neste último caso duas variantes). As restantes três carteiras de investimento são construídas com base na otimização do índice de mercado através dos modelos média-variância e média-semivariância (duas variantes), sem recurso à pré-seleção de ativos com a DEA. O período em análise situa-se entre 1 de janeiro de 2018 e 31 de dezembro de 2020, sendo as carteiras rebalanceadas trimestralmente.

Os resultados mostram que a aplicação das metodologias DEA e TMP, individualmente e conjuntamente, contribuem para a obtenção de melhores resultados do que o índice de mercado. Verifica-se também que o modelo média-semivariância gerou retornos superiores ao modelo média-variância.

Palavras-chave: Carteiras de investimento, Data Envelopment Analysis, Teoria Moderna do Portfólio, modelo da média-variância, semivariância

Abstract

It is common for investors to face a trade-off between risk and return when building an investment portfolio. The choice of which assets to buy and the decision of the capital allocation in each of those often involves a trade-off between minimizing risk and maximizing return. Markowitz (1952) proposed Modern Portfolio Theory (MPT) in order to help a rational investor solve this problem. Recently, Data Envelopment Analysis (DEA) has been applied to investment portfolio construction and the results are promising compared to investing in a market index.

In this study, DEA and MPT methodologies are applied to the benchmark Dow Jones Industrial Average (DJI) in the construction and optimization of investment portfolios. Seven investment portfolios are compared. Four of these are constructed based on Banker, Charnes and Cooper's (BCC) classic DEA model. One portfolio assumes equal capital allocation among the previously selected efficient stocks while the others are optimized based on mean-variance and mean-semivariance (target mean and null returns) frameworks. The remaining three portfolios are constructed based on the mean-variance and mean-semivariance (target mean and null returns) of the DJI without the pre-selection of the efficient stocks of the DEA model. The investment period goes from 1st of January 2018 to 31st December 2020 with the portfolios being rebalanced quarterly.

Results demonstrate that the application of DEA and TMP methodologies, individually and simultaneously, help attaining better results than an investment in the market index. In addition, the mean-semivariance framework outperformed the mean-variance framework.

Keywords: Data Envelopment Analysis, Investment Portfolio, Modern Portfolio Theory, mean-variance framework, mean-semivariance framework

Lista de Siglas

BCC – Banker, Charnes e Cooper

CAGR – Compound Annual Growth Rate

CAPM – Capital Asset Pricing Model

CCR – Charnes, Cooper e Rhodes

CRS – Constant Returns to Scale

DEA – Data Envelopment Analysis

DEPI – DEA Portfolio Efficiency Index

DJI – Dow Jones Industrial Average

DMU – Decision Making Unit

EUA – Estados Unidos da América

PER – Price Earnings Ratio

SFA – Stochastic Frontier Analysis

TMP – Teoria Moderna do Portfólio.

VaR – Value at Risk

VRS – Variable Returns to Scale

Índice

1	Introdução	1
2	Revisão da Literatura.....	3
2.1	Teoria Moderna do Portfólio	3
2.1.1	Modelo Média-Variância	4
2.1.2	Medidas de Desempenho	7
2.1.3	Modelo Média-Semivariância	9
2.2	Data Envelopment Analysis	11
2.2.1	Modelos Clássicos DEA	13
2.2.2	Aplicações da DEA.....	15
2.2.3	Aplicações da DEA no Mercado de Capitais	16
2.2.4	Considerações Finais	19
3	Metodologia	21
3.1	Estratégia de Investigação e Dados	21
3.2	Metodologia DEA.....	23
3.3	Metodologia TMP.....	26
4	Resultados.....	31
4.1	Resultados DEA	31
4.2	Resultados das Carteiras de Investimento.....	31
5	Conclusão	39
	Bibliografia.....	41
	Apêndice A – Resultados intermédios.....	47
	Apêndice B – Composição das carteiras.....	51

Índice de Tabelas

Tabela 1 – Revisão da literatura que aplica DEA na seleção de carteiras de investimento.	18
Tabela 2 – Empresas constituintes do DJI no início de cada trimestre em 2018, 2019 e 2020.	22
Tabela 3 – Classificação e cálculo dos inputs e outputs.	24
Tabela 4 – Codificação dos inputs e outputs para o R.	25
Tabela 5 – Resultados da aplicação do modelo DEA BCC às ações constituintes do DJI nos 12 trimestres em análise.	32
Tabela 6 – Retornos das carteiras de investimento nos 12 trimestres em análise.	33
Tabela 7 – Retornos das carteiras de investimento por ano, e retorno anualizado.	35
Tabela 8 – Rácios de Sharpe das carteiras no período entre 2018 e 2020.	36
Tabela 9 – Rácios de Sortino das carteiras de investimento no período entre 2018 e 2020.	36
Tabela 10 – Scores de eficiência resultado da aplicação do modelo DEA BCC às ações constituintes do DJI nos 12 trimestres em análise.	47
Tabela 11 – Taxas de juro sem risco para os 12 trimestres em análise.	48
Tabela 12 – Retorno Esperado das carteiras de investimento nos 12 trimestres em análise.	48
Tabela 13 – Volatilidade das carteiras de investimento nos 12 trimestres em análise.	49
Tabela 14 – Rácio de Sharpe das carteiras de investimento nos 12 trimestres em análise.	49
Tabela 15 – Rácios de Sortino das carteiras de investimento nos 12 trimestres em análise.	50
Tabela 16 – Composição do índice DJI durante os 12 trimestres em análise.	51
Tabela 17 – Composição da carteira DJI_{MV} durante os 12 trimestres em análise.	52
Tabela 18 – Composição da carteira DJI_{SV0} durante os 12 trimestres em análise.	53
Tabela 19 – Composição da carteira DJI_{SVu} durante os 12 trimestres em análise.	54
Tabela 20 – Composição da carteira $DEA_{1/N}$ durante os 12 trimestres em análise.	55
Tabela 21 – Composição da carteira DEA_{MV} durante os 12 trimestres em análise.	56
Tabela 22 – Composição da carteira DEA_{SV0} durante os 12 trimestres em análise.	57
Tabela 23 – Composição da carteira DJI_{SVu} durante os 12 trimestres em análise.	58

Índice de Figuras

Figura 1 – Retorno anual das carteiras, nos anos 2018, 2019 e 2020.....	37
Figura 2 – Retorno cumulativo das carteiras de investimento no período entre 1 de janeiro de 2018 e 31 de dezembro de 2020.....	38

1 Introdução

Nos mercados financeiros, os investidores têm acesso a um conjunto vasto de ativos nos quais podem aplicar o seu capital, sejam estas ações, obrigações, instrumentos derivados, etc. Historicamente, as ações têm proporcionado um retorno superior às obrigações, verificando-se atualmente uma discrepância ainda maior com grande parte das obrigações a proporcionar retornos abaixo do nível alvo de inflação (2%) do Banco Central Europeu e da Reserva Federal dos Estados Unidos. Nesta dissertação não serão consideradas obrigações nem instrumentos derivados, uma vez que as ações são mais atrativas para muitos investidores e as suas características as tornam mais adequadas aos métodos usados, especialmente a Teoria Moderna do Portfólio (TMP). As ações destacam-se pelo potencial retorno associado, crescimento em linha com o crescimento da economia e mecanismo de proteção contra a inflação.

A decisão de investir torna-se ainda mais difícil quando se considera não só o número de ativos existentes, mas também a proporção que se deve alocar a cada um. Adicionalmente, o investidor depara-se com o *trade-off* entre o retorno e o risco, ou seja, o conflito entre a maximização do retorno e a minimização do risco. Na construção de uma carteira de investimento, o retorno esperado será, em teoria, mais elevado consoante maior o risco envolvido. Contudo, o investidor racional é avesso ao risco e desta forma, vê-se obrigado a aceitar um retorno esperado em função do nível de risco que está disposto a assumir. Este problema existe, é complexo e é expectável que continue a existir enquanto se transacionarem ativos nos mercados financeiros. Uma das possíveis soluções é a utilização da TMP proposta por Markowitz (1952) que ajuda os investidores a tomarem decisões racionais na seleção de ativos e alocação de capital na constituição de uma carteira de investimento. No entanto, existem outras metodologias que podem ajudar o investidor, como por exemplo a *Data Envelopment Analysis* (DEA) desenvolvida por Charnes, Cooper e Rhodes (1978), quando utilizada como mecanismo de *benchmarking*, neste caso para identificar os ativos mais interessantes para a construção do portfólio.

Nesta dissertação são utilizadas as duas metodologias DEA e TMP na construção e otimização de carteiras de investimento a partir do índice utilizado como *benchmark*, o *Dow Jones Industrial Average* (DJI). O estudo procura verificar se a utilização exclusiva da metodologia DEA pode contribuir para obter melhores resultados que o investimento no *benchmark* DJI. Simultaneamente pretende-se averiguar se a otimização baseada na TMP pode contribuir para obter melhores resultados quando aplicada às ações constituintes do

índice DJI. Adicionalmente, pretende-se verificar se há benefícios acrescidos em conjugar as duas metodologias DEA e TMP na seleção e otimização de carteiras de investimento. Por último pretende-se comparar a utilização dos modelos média-variância e média-semivariância na seleção e otimização de carteiras de investimento e verificar se existe vantagem da utilização de um face ao outro. Considera-se que as respostas aos objetivos mencionados serão do interesse não só de gestores de fundos e investidores a retalho, mas também de estudantes que procurem conhecimento sobre as metodologias DEA e TMP.

A dissertação está organizada em cinco secções. Na secção 2 efetua-se uma breve revisão da literatura sobre a TMP, designadamente os modelos média-variância e média-semivariância, assim como literatura sobre a DEA, em particular os modelos clássicos CCR e BCC. Na secção 3 apresenta-se a metodologia, desde o processo de recolha e tratamento dos dados, à implementação dos modelos abordados na revisão da literatura, bem como a justificação da escolha do índice *benchmark* e do período em análise utilizados. Na secção 4 expõem-se, analisam-se e discutem-se os resultados obtidos da aplicação do modelo DEA escolhido (BCC) e da otimização através dos modelos média-variância e média-semivariância. Na secção 5 apresentam-se as principais conclusões, discutem-se as limitações dos resultados obtidos e sugerem-se eventuais ajustes e aspetos em consideração para linhas de investigação futura.

2 Revisão da Literatura

Este capítulo faz um enquadramento às metodologias Teoria Moderna do Portfólio e *Data Envelopment Analysis*. Na secção 1.1 são apresentados diversos conceitos essenciais para a interpretar a Teoria Moderna do Portfólio, bem como a teoria em si, e algumas medidas de desempenho frequentemente utilizadas. Por fim é apresentado o modelo alternativo média-semivariância. A secção 1.2 é dedicada à DEA, onde se apresentam as suas origens, os principais modelos, enunciando as principais vantagens e desvantagens, bem como a identificação de eventuais problemas e a sua resolução. É também demonstrada a vasta aplicação desta de metodologia em diferentes contextos e por diferentes entidades, com destaque para o setor financeiro, e em particular como apoio à decisão na seleção de ações para a constituição de carteiras de investimento.

2.1 Teoria Moderna do Portfólio

Os conceitos otimização de carteiras de investimento e diversificação têm sido fundamentais no desenvolvimento dos mercados financeiros e nas decisões dos investidores (Fabozzi et al., 2007). Um dos avanços mais significativos neste tópico ocorreu com a publicação do artigo *Portfolio Selection* de Markowitz (1952), no qual apresentou a famosa Teoria Moderna do Portfólio (TMP), visando dar resposta a como um investidor deve alocar o seu capital entre diferentes alternativas de investimento.

De acordo com Markowitz (1952) um investidor racional considera o retorno como desejável e o risco como indesejável, tendo assim como objetivos a maximização do retorno e, ao mesmo tempo, a minimização do risco.

Para Markowitz (1952, 1959) a diversificação de uma carteira de investimento é mais complexa do que a diversificação aleatória mais conhecida por “não coloques todos os ovos no mesmo cesto”, isto é, envolve a combinação de ativos com coeficientes de correlação baixos de forma a reduzir o risco sem diminuir o retorno esperado da carteira de investimento. Neste sentido, quanto menor for a correlação ou, equivalentemente, a covariância dos ativos da carteira de investimento (Francis e Kim, 2013), melhor.

A TMP veio revolucionar o aconselhamento aos investidores por parte dos analistas financeiros, nomeadamente por ter introduzido a ideia de que uma decisão financeira inteligente passa pela análise quantitativa do *trade-off* entre o risco e o retorno (Fabozzi et al., 2007) e também porque o aconselhamento financeiro passou a ter como base a

investigação científica, o que não sucedia até então (Francis e Kim, 2013). O modelo média-variância, proposto por Markowitz (1952), utiliza a média como medida de tendência central e a variância como medida de dispersão, para a seleção e otimização de carteiras de investimento. Markowitz (1959) menciona o custo, a conveniência e a familiaridade como as principais vantagens da utilização da variância.

2.1.1 Modelo Média-Variância

O modelo média-variância, proposto por Markowitz (1952), pressupõe que um investidor tem de escolher uma carteira de investimento composta por ativos selecionados entre um conjunto de n ativos com risco. A avaliação da ação de uma dada empresa, bem como a avaliação do mercado acionista, depende das expectativas dos intervenientes do mercado, que se vão alterando ao longo do tempo e que por sua vez têm impacto no retorno esperado (Elton et al., 2014). Por este motivo, o modelo utiliza indicadores estatísticos relativos ao comportamento da ação – o retorno esperado e a sua variância – e não indicadores relativos à avaliação da ação.

Uma forma de estimar o retorno esperado futuro de um ativo i é assumir que os retornos históricos são representativos do comportamento futuro do ativo. Este pressuposto é válido, essencialmente, quando a distribuição dos retornos é estável ao longo do tempo. Desta forma, é possível definir o retorno esperado do ativo i , $E(R_i)$, como a média do histórico de retornos (Elton et al., 2014):

$$E(R_i) = \sum_{t=1}^T \frac{R_{it}}{T} \quad (1)$$

onde R_{it} é o retorno do ativo i observado no período t e T corresponde ao número de períodos passados considerado.

O retorno de uma carteira de investimento R_p é obtido através da média ponderada do retorno de cada ativo R_i . A ponderação X_i corresponde à fração da carteira de investimento alocada ao ativo i . Podemos definir R_p como (Elton et al., 2014):

$$R_p = \sum_{i=1}^n X_i R_i \quad (2)$$

A gestão do risco é um processo crucial e necessário na tomada de decisões financeiras, que envolve a identificação e análise quantitativa do risco envolvido num investimento, bem como analisar os potenciais benefícios de incorrer nesse mesmo risco (Fabozzi et al., 2007).

A variância σ^2 é uma forma habitual de representar o risco total (incerteza) associado a um ativo, sendo uma medida de dispersão dos retornos em relação à média (valor esperado) (Fabozzi et al., 2007):

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum_{t=1}^T (R_{it} - E(R_i))^2}{T}, \quad (3)$$

sendo R_{it} definido como o retorno de um determinado ativo i no momento t e $E(R_i)$ como o seu respetivo retorno médio (valor esperado) para um histórico de T retornos.

De forma equivalente, é utilizado o desvio padrão para medir a volatilidade:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2} \quad (4)$$

Outra medida de risco geralmente utilizada é o beta, que tem a sua origem no modelo *Capital Asset Pricing Model* (CAPM). Este modelo foi proposto por Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966) e divide o risco em risco sistemático ou de mercado e risco não sistemático ou risco específico. O risco sistemático corresponde à componente do risco que resulta das condições gerais de funcionamento do mercado e da economia, componente esta que não é possível eliminar com o recurso à diversificação (Fabozzi et al., 2007). O risco sistemático de um ativo depende da sensibilidade do seu preço aos movimentos do mercado no qual está inserido (Sharpe, 1995). Os retornos do mercado são definidos geralmente através de *índices (benchmarks)*, como por exemplo o S&P500, o MSCI World e o *Dow Jones Industrial Average* (DJI) que representam, respetivamente, 500 das maiores empresas cotadas em bolsa nos EUA, 1586 empresas de média e grande dimensão cotadas em 23 países desenvolvidos e 30 empresas reputadas e de grande dimensão (*blue chip*) cotadas em bolsa nos EUA. No CAPM é utilizado o rácio β_{iM} para medir o risco sistemático do ativo i (Fabozzi et al., 2007; Fama e French, 2004):

$$\beta_{iM} = \frac{cov(R_i, R_M)}{\sigma^2(R_M)} \quad (5)$$

O rácio entre a covariância dos retornos do ativo i , R_i , e os do mercado M , R_M , e a variância dos retornos do mercado M resulta na medida de sensibilidade do preço do ativo i ao preço do mercado M , β_{iM} . Por outro lado, o risco não sistemático é a componente de risco

associada a um ativo, que pode ser específico de uma empresa ou de uma indústria, e que é possível de eliminar com o recurso à diversificação (Fabozzi et al., 2007; Sharpe, 1995).

Para calcular a variância da carteira de investimento é necessário calcular a matriz de variâncias-covariâncias:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \quad (6)$$

A covariância entre dois ativos é elevada quando os seus preços, por qualquer motivo, tendem a mover-se em conjunto na mesma direção; já uma covariância negativa significa que o preço dos ativos em análise tende a mover-se em direções opostas. De acordo com Markowitz (1959) o risco de uma carteira de investimento estima-se com base na covariância dos seus ativos. O risco associado a uma carteira de investimento depende da variância (desvio padrão) dos retornos de cada ativo, dos respetivos pesos na composição da carteira, bem como das covariâncias (ou, equivalentemente, dos coeficientes de correlação) entre os retornos dos ativos (Francis e Kim, 2013). A variância de uma carteira de investimento pode ser definida como:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij} \quad (7)$$

onde X_i e X_j representam os pesos de cada ativo na carteira de investimento e σ_{ij} a covariância entre os retornos dos ativos i e j (quando $i=j$, a variância dos retornos do ativo i).

Assumindo que não seja possível realizar vendas a descoberto, o problema de otimização de uma carteira de investimento de Markowitz pode ser formulado da seguinte forma, na qual as ponderações X_1, \dots, X_n são as variáveis de decisão:

$$\min \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij} \quad (8)$$

Sujeito às seguintes restrições:

$$\sum_{i=1}^n X_i E(R_i) = \mu_0 \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i = 1$$

$$X_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$$

O modelo média-variância (Markowitz, 1952; 1959), apresentado nas expressões (8) e (9), tem como objetivo minimizar o risco (variância) de determinada carteira de investimento, para um retorno esperado alvo μ_0 , sujeito a que a soma dos pesos dos ativos na carteira seja igual a 1, e que o peso de cada ativo i não seja negativo, para impossibilitar venda a descoberto (*short selling*). Para resolver o problema descrito é necessário estimar a matriz de variâncias-covariâncias e os retornos esperados dos ativos, o que muitas vezes é feito com recurso a retornos históricos, como indicado anteriormente. Este autor também formulou o problema de maximização do retorno esperado sujeito a um determinado nível de risco. Há também problemas de otimização de carteiras de investimento que visam unicamente minimizar o risco, assim como problemas cujo objetivo é a maximização do retorno ajustado ao risco (Estrada, 2007).

2.1.2 Medidas de Desempenho

O rácio de Sharpe, proposto por Sharpe (1966), é uma medida para avaliar o desempenho de carteiras de investimento. Este rácio mede o excesso de retorno por unidade adicional de risco total da carteira de investimento:

$$SR_P = \frac{R_P - r_f}{\sqrt{\sigma_P^2}} \quad (10)$$

onde R_P representa o retorno da carteira de investimento e r_f a taxa de juro sem risco.

Um caso particular e fulcral da fronteira de eficiência no âmbito da TMP é o portfólio que maximiza o rácio de Sharpe, procurando simultaneamente maximizar a rentabilidade esperada e minimizar o risco total:

$$\max SR_P = \frac{E(R_p) - r_f}{\sqrt{\sigma_P^2}} \quad (11)$$

Sujeito às restrições:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 1 \quad (12)$$

$$X_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$$

Após a proposta desta medida de desempenho por Sharpe (1966) surgiram outras que, à semelhança do rácio de Sharpe, são atualmente utilizadas. Entre estas inclui-se o rácio de Sortino proposto por Sortino e Price (1994). O rácio de Sortino difere do rácio de Sharpe sobretudo na medida de risco utilizada, considerando-se aqui o semi-desvio padrão $\sqrt{\Sigma_{pB}^2}$, em relação a um valor *target* B :

$$SOR_P = \frac{R_P - B}{\sqrt{\Sigma_{pB}^2}} \quad (13)$$

A semivariância Σ_{iB}^2 de um ativo i é definida relativamente a um *target* B .

$$\Sigma_{iB}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [\text{Min}(R_{it} - B, 0)]^2 \quad (14)$$

De forma a manter a comparabilidade com o rácio de Sharpe, alguns autores, nomeadamente (Estrada, 2006, 2007) consideram o valor *target* no numerador igual à taxa de juro sem risco, enquanto o valor *target* utilizado no cálculo da semivariância é igual a zero ou igual à rentabilidade média. O semi-desvio padrão é definido por:

$$\Sigma_{iB} = \sqrt{\Sigma_{iB}^2} \quad (15)$$

A matriz de semicovariância apresenta problemas de endogeneidade e produz $\Sigma_{ij} \neq \Sigma_{ji}$, o que torna difícil estimar a semivariância de uma carteira de ativos a partir das semivariâncias dos seus constituintes. De modo a solucionar esta questão, Estrada (2007) propôs uma aproximação heurística que resulta numa matriz de semicovariância simétrica e exógena e que pode ser definida como:

$$\Sigma_{ijB} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [\text{Min}(R_{it} - B, 0) * \text{Min}(R_{jt} - B, 0)] \quad (16)$$

De acordo com a aproximação de Estrada (2007), a semivariância de uma carteira de investimento com respeito a um determinado *target B* pode ser aproximada através de:

$$\Sigma_{pB}^2 \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \Sigma_{ijB} \quad (17)$$

Segundo Estrada (2007), esta definição pode ser utilizada para qualquer retorno *target B* e gera uma matriz simétrica e exógena $\Sigma_{ijB} = \Sigma_{jiB}$.

2.1.3 Modelo Média-Semivariância

No mundo real, os retornos dos ativos tendem a ser assimétricos, ou seja, não seguem propriamente uma distribuição normal (Jansen e de Vries, 1991; Campbell, 1992). Considerando que a variância trata os desvios acima e abaixo do retorno médio da mesma forma, nos casos em que a distribuição dos retornos não seja normal, utilizar a variância como medida de risco pode não ser o mais correto, nomeadamente na seleção de ativos e respetiva alocação de pesos na carteira de investimento (Boasson et al., 2011).

Roy (1952) foi pioneiro na utilização de volatilidade negativa como medida de risco na otimização de carteiras de investimento, medindo o risco pela probabilidade do retorno atingir um valor inferior a um nível pré-determinado (Boasson et al., 2011). O próprio Markowitz (1959) propôs como medida de risco a semivariância, considerando apenas os retornos inferiores à média ou considerando um nível de retorno pré-definido, em detrimento da variância. Posteriormente, Markowitz et al. (1993) refere que o semi-desvio padrão é uma medida de risco mais apropriada do que o desvio padrão, uma vez que a principal preocupação dos investidores é o desempenho negativo.

Ainda assim, o modelo média-semivariância não é o mais utilizado na otimização de carteiras de investimento, uma vez que a matriz de semicovariância apresenta problemas de endogeneidade (Brito et al., 2016; Estrada, 2007), como referido anteriormente. Contudo, o modelo média-semivariância pode ser obtido através do modelo média-variância, substituindo a medida de risco da carteira de investimento pela semivariância. Devido às dificuldades já referidas na utilização da semivariância, esta é por vezes substituída por uma aproximação, tal como a proposta por Estrada (2007), apresentada na equação (17). Este

modelo constitui uma adaptação do problema original de Markowitz (1952) de minimização do risco sujeito a um nível de retorno esperado μ_0 :

$$\min \Sigma_{pB}^2 \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \Sigma_{ijB} \quad (18)$$

Sujeito às seguintes restrições:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i E(R_i) &= \mu_0 \\ \sum_{i=1}^n X_i &= 1 \\ X_i &\geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (19)$$

À semelhança do que acontece no modelo média-variância, o portfólio que procura, ao mesmo tempo, maximizar a rentabilidade esperada e minimizar o risco, medido pela semivariância, pode ser obtido pela maximização do rácio de Sortino:

$$\max \text{SOR}_p = \frac{E(R_p) - r_f}{\sqrt{\Sigma_{PB}^2}} \quad (20)$$

Sujeito às restrições:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i &= 1 \\ X_i &\geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (21)$$

2.2 Data Envelopment Analysis

O estudo da eficiência tem sido particularmente importante no âmbito das organizações, nomeadamente com o objetivo de melhorar a produtividade e por sua vez gerar valor. O conceito de eficiência técnica foi introduzido por Koopmans (1951) quando adaptou o critério de *Pareto*¹, desenvolvido no estudo das políticas de bem estar social de Pareto (1906), à produção e apresentou o conceito eficiência de *Pareto-Koopmans*². Também Debreu (1951) contribuiu para a literatura na investigação da eficiência quando apresentou o coeficiente de utilização de recursos³.

Farrell (1957), motivado pela necessidade de desenvolver novos métodos para a avaliação da produtividade, e em linha com a investigação previamente desenvolvida, decompôs a avaliação da eficiência em duas componentes: (i) eficiência técnica e (ii) eficiência de afetação de recursos. A eficiência técnica mede a relação simples entre *inputs* e *outputs*, considerando a fronteira de possibilidades de produção, não sendo possível a produção de mais *outputs* dados os respetivos *inputs* sem que se melhore a tecnologia de produção. Por outro lado, a eficiência de afetação de recursos verifica a capacidade de uma empresa utilizar os seus recursos em proporções ótimas, conhecendo os respetivos preços, considerando que a produção representa as preferências dos consumidores e que o custo marginal de produção deva ser igual ao preço.

Posteriormente surgiram duas metodologias de investigação distintas para a avaliação da eficiência: (i) *Stochastic Frontier Analysis* (SFA) e (ii) *Data Envelopment Analysis* (DEA). A técnica SFA foi desenvolvida por Aigner et al. (1977) e por Meeusen e Broeck (1977), constituindo uma metodologia paramétrica que tem por base modelos econométricos. A avaliação da eficiência é efetuada relativamente a uma fronteira teórica, sendo necessária a especificação prévia da função de produção ou custo, de modo a ser possível determinar o conjunto de recursos necessários para atingir determinado nível de produto. Paralelamente, a técnica DEA, desenvolvida por Charnes, Cooper e Rhodes (1978), consiste numa metodologia não paramétrica, determinística, que recorre a programação linear e que, ao contrário da SFA, não exige a especificação da função de produção.

¹ Critério de *Pareto* – Surgiu na base da avaliação de políticas sociais e considera uma política social como correta caso beneficie algumas pessoas sem afetar negativamente alguém.

² Eficiência de *Pareto-Koopmans* – Define que uma unidade de produção é tecnicamente eficiente se nenhum dos seus *inputs* ou *outputs* conseguir ser melhorado sem piorar outro *input* ou *output*.

³ Coeficiente de utilização de recursos – Mede a ineficiência de alocação de recursos numa economia calculando os recursos possíveis de reduzir para atingir o mesmo nível de satisfação para o consumidor.

A DEA surgiu para dar resposta à necessidade de avaliar a eficiência relativa de unidades de produção equivalentes com múltiplos recursos (*inputs*) e produtos (*outputs*). Estas unidades de produção homogéneas, ou *Decision Making Units* (DMUs), utilizam os mesmos *inputs* para produzir os mesmos *outputs* (Charnes et al., 1978). O aparecimento da metodologia DEA tornou possível a análise de eficiência quando a natureza das relações entre *inputs* e *outputs* das DMUs é demasiado complexa ao ponto de impossibilitar a utilização de outras abordagens (Cooper et al., 2011).

Embora a DEA esteja interligada à Teoria da Produção na área da economia, esta metodologia também é amplamente utilizada na investigação operacional como técnica de *benchmarking* e, nesta circunstância, as DMUs eficientes formam uma fronteira de melhores práticas (Cook et al., 2014). Inicialmente, a metodologia DEA foi concebida com o objetivo de comparar DMUs homogéneas, identificar as mais eficientes e com estas formar uma fronteira de eficiência empírica. Esta metodologia também permite medir o nível de eficiência das DMUs que não se situam na fronteira e identificar possíveis *benchmarks* com os quais as DMUs ineficientes possam ser comparadas.

Como já referido, a metodologia DEA foi criada por Charnes, Cooper e Rhodes (1978), que apresentaram o primeiro modelo conhecido como CCR (em seu nome) ou CRS (*Constant Returns to Scale*), por se tratar de um modelo que considera retornos constantes à escala. Neste caso, qualquer variação ao nível dos *inputs* traduz-se numa variação proporcional ao nível dos *outputs*. Posteriormente, Banker, Charnes e Cooper (1984) apresentaram o modelo BCC (em seu nome) ou VRS (*Variable Returns to Scale*), que considera retornos variáveis à escala, isto é, uma variação nos *inputs* proporciona uma variação maior ou menor nos *outputs*, permitindo retornos crescentes ou decrescentes à escala.

Para além dos retornos à escala, outro aspeto a ter em consideração é a orientação do modelo, que pode ser orientado para os *inputs* ou para os *outputs* dependendo do objetivo do problema. Numa abordagem com orientação para os *inputs* o objetivo é atingir a eficiência minimizando os *inputs* e mantendo a quantidade de *outputs* constante. Por outro lado, numa abordagem com orientação para os *outputs* o objetivo é atingir a eficiência maximizando os *outputs* e mantendo os *inputs* constantes.

Na próxima subsecção serão apresentados em destaque os modelos clássicos CCR e BCC com orientação para os *inputs* atendendo a que vai ser esta a orientação utilizada na Secção 3 – Metodologia.

2.2.1 Modelos Clássicos DEA

O modelo clássico CCR (Charnes et al., 1978) é uma técnica de otimização que considera rendimentos constantes à escala, ou seja, assume-se que variações nos valores dos *inputs* geram variações proporcionais nos valores dos *outputs*. Este modelo permite avaliar a eficiência de uma DMU_j representada pelo quociente entre a soma ponderada dos *outputs* e a soma ponderada dos *inputs* (Charnes et al., 1994):

$$h = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}}, \quad (22)$$

Em (22) defina-se:

$j = 1, \dots, n$	unidades de decisão (DMU);
$r = 1, \dots, s$	<i>outputs</i> ;
$i = 1, \dots, m$	<i>inputs</i> ;
y_{rj}	quantidade do <i>output</i> r para a DMU j ;
x_{ij}	quantidade do <i>input</i> i para a DMU j ;
u_r	peso atribuído ao <i>output</i> r ;
v_i	peso atribuído ao <i>input</i> i .

Neste modelo assume-se como objetivo a avaliação de eficiência de n DMUs, que utilizam quantidades variáveis de m *inputs* para produzir s *outputs*. Adicionalmente e para que tal aconteça, a DMU_j recorre à quantidade x_{ij} do *input* i ($i = 1, \dots, m$) para produzir a quantidade y_{rj} do *output* r ($r = 1, \dots, s$). Pressupõe-se também que as quantidades de *inputs* x_{ij} e *outputs* y_{rj} sejam positivas para cada DMU_j , admitindo-se a existência de pelo menos um valor positivo de um *input* e de um valor positivo de um *output*.

Para cada DMU_j são calculados os pesos ótimos através da maximização do quociente de eficiência h que consta em (22). Os pesos v_i e u_r são atribuídos aos *inputs* e aos *outputs*, respetivamente, de forma a que a medida de eficiência h atinja um valor máximo de 1, valor correspondente às DMUs na fronteira de melhores práticas, isto é, consideradas eficientes.

Para calcular a eficiência de uma $DMU_{j_0} \in \{1, 2, \dots, n\}$ é possível recorrer à forma fracionária do modelo CCR resolvendo o seguinte problema:

$$\max h_0 = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0}}, \quad (23)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} &\leq 1, & j = 1, \dots, n \\ u_r &\geq \varepsilon, & r = 1, \dots, s \\ v_i &\geq \varepsilon, & i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (24)$$

A função objetivo h_0 representa o *score* de eficiência atribuído à DMU_{j_0} . Este *score* é calculado através da maximização da função objetivo que consta em (23), sujeito às restrições apresentadas em (24). O ε (*épsilon*) corresponde a um número infinitesimal, arbitrário e positivo e previne que os pesos v_i e u_r sejam nulos.

De modo a avaliarmos a eficiência das restantes DMUs é necessário maximizar a função objetivo h_0 para cada DMU_j em consideração. As DMUs eficientes são aquelas que têm um *score* de eficiência igual a 1, ou seja, aquelas que não podem ser dominadas por outras no conjunto de DMUs em estudo, o que corresponde a uma eficiência de *Pareto*.

O modelo CCR na forma fracionária exposto em (23) e em (24) pode ser convertido num problema de programação linear assumindo que $\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} = 1$. Dessa forma obtém-se o modelo CCR linear orientado para os *inputs*:

$$\max \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0}, \quad (25)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0} &= 1, \\ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} &\leq 0, & j = 1, \dots, n \\ u_r &\geq \varepsilon, & r = 1, \dots, s \\ v_i &\geq \varepsilon, & i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (26)$$

O problema descrito pelas equações (25) e (26) envolve $s + m$ variáveis, correspondentes aos pesos dos *outputs* e dos *inputs*, r e i , respetivamente. Adicionalmente, o número total de restrições do problema perfaz $n + s + m + 1$.

O modelo BCC (Banker et al. 1984) é uma extensão do modelo CCR, com a diferença que o *score* de eficiência considera rendimentos variáveis à escala. Desta forma, com a introdução de um fator de escala u_{j_0} (como uma variável de decisão adicional), temos:

$$\max \sum_{r=1}^s u_r y_{rj_0} - u_{j_0}, \quad (27)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m v_i x_{ij_0} &= 1, \\ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - u_{j_0} &\leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ u_r &\geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \\ v_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ u_{j_0} &\in \mathfrak{R} \end{aligned} \quad (28)$$

O fator de escala u_{j_0} , se negativo, indica que a DMU_{j_0} tem retornos crescentes à escala, por outro lado, se positivo significa que a DMU_{j_0} tem retornos decrescentes à escala.

2.2.2 Aplicações da DEA

A definição de DMU é genérica e flexível, permitindo uma diversidade de aplicações da DEA nos mais variados setores, em diversos contextos e em múltiplos países. Liu et al. (2013) publicaram uma revisão bibliográfica de aplicações da metodologia DEA, onde mostram a evolução da literatura científica, de 1978 a 2010, dentro dos setores da banca, saúde, agrícola, transportes e educação. A sua revisão da literatura diferencia os artigos que se focam meramente na parte da metodologia DEA dos artigos que tratam aplicações reais. Depois apresentam informação sobre os artigos, que tratam exclusivamente da metodologia DEA, mais citados para cada um dos principais setores de aplicação.

Emrouznejad e Yang (2018) reviram a literatura dos primeiros quarenta anos de publicações em jornais científicos no âmbito da teoria e das aplicações de DEA. Verificaram que é notável o crescimento de artigos publicados entre 1978 e 2016, sendo que no final de 2016 havia 10 300 artigos publicados de um conjunto de 11 975 autores diferentes. Nesta investigação chegaram à conclusão que as aplicações mais estudadas até ao fim do ano de 2016 eram nos setores agrícola, bancário, logística, transportes e políticas públicas.

Ainda no âmbito das aplicações da DEA, mas mais especificamente no setor da saúde Kohl et al. (2019) fizeram a revisão da literatura de 262 artigos, compreendidos entre 2005 e 2016, que aplicam DEA em hospitais. Os autores não só fornecem estatística descritiva sobre os artigos, como também os agrupam consoante o seu objetivo. Estes observaram que em 80% das publicações foi utilizado um dos modelos DEA clássicos, o CCR ou o BCC.

Kaffash et al. (2020) reviram a literatura de 132 artigos de DEA com aplicação no setor dos seguros, publicados entre 1993 e julho de 2018, com foco na metodologia e nas aplicações. Na sua análise não só identificam as lacunas na literatura, como também apontam para temas que estão estudados de forma muito exaustiva neste setor. Adicionalmente, apresentam sugestões para investigação futura, em linha com as mudanças verificadas recentemente no setor.

No setor da banca, Paradi e Zhu (2013) apresentam uma revisão da literatura composta por 80 artigos, desde 1985, que abordam aplicações de DEA em 24 países diferentes. Na sua investigação observaram que maioria dos artigos pretende melhorar a metodologia de DEA, seguindo-se os artigos que se focam em análise de *benchmarking*, identificando as filiais mais eficientes e identificando a origem das ineficiências.

2.2.3 Aplicações da DEA no Mercado de Capitais

Murthi et al. (1997) foram os primeiros autores a utilizar DEA para medir a eficiência de fundos de investimento. Estes autores propuseram uma generalização do rácio de Sharpe à qual chamaram DEPI (*DEA Portfolio Efficiency Index*), que recorre ao retorno esperado como *output* e ao risco (desvio padrão) bem como a diversos custos de transação como *inputs*. Basso e Funari (2001), numa abordagem semelhante, utilizaram diversas medidas de risco (desvio padrão, semi-desvio padrão e beta) e comissões de subscrição e resgate como *inputs* e como *outputs* usaram o retorno esperado e a fração de períodos no qual o desempenho do fundo de investimento não foi dominado pelo de outro. Basso e Funari (2003) substituíram este último *output* por um *score* para medir um fundo de investimento em termos de responsabilidade social. Mais recentemente, a investigação evoluiu no sentido

de avaliar não só o desempenho geral dos fundos de investimento, mas também outras componentes da sua gestão, recorrendo a métodos de avaliação de eficiência com várias fases – veja-se, por exemplo (Premachandra et al., 2012; Galagedera et al., 2016; Galagedera, 2019)

No universo dos estudos que avaliam o desempenho de fundos de investimento, diversos são os que utilizam modelos clássicos: uns aplicaram o modelo CCR (Murthi et al., 1997; Basso e Funari, 2001; Anderson et al., 2004; Hsu e Lin, 2007; Hu e Chang, 2008), outros recorreram ao modelo BCC (Choi e Murthi, 2001; Chen e Lin, 2006; Alexakis e Tsolas, 2011; Hu et al., 2012; Pendaraki, 2012; Tsolas, 2014) e alguns utilizaram os dois modelos em conjunto (Galagedera e Silvapulle, 2002; Zhao e Wang, 2007; Boasson et al., 2011; Gökgöz e Çandarlı, 2011; Babalos et al., 2015). Também há estudos que aplicam outros modelos não clássicos, como é o caso de (Castelo Gouveia et al., 2018) que utilizam o modelo *Value-Based* DEA, que combina DEA com análise multicritério de apoio à decisão, para a avaliar a eficiência de 15 fundos de investimento portugueses.

A metodologia DEA, designadamente a implementação dos modelos clássicos CCR e BCC, também tem sido aplicada à seleção e otimização de carteiras de investimento (Powers e McMullen, 2000; Lopes et al., 2008; Ahmadzade et al., 2011; Lopes et al., 2011; Gardijan e Kojić, 2012; Junior et al., 2014; Gardijan e Škrinjarić, 2015), conforme resumido na Tabela 1. Da revisão da literatura, apenas Powers e McMullen (2000) não faz rebalanceamento ou recomposição da carteira de investimento. Os autores que o fazem, recompõem a carteira com base no Índice escolhido para representar o mercado, IBrX 100 (Lopes et al., 2008), Ibovespa (Lopes et al., 2011; Junior et al., 2014) e CROBEX (Gardijan e Kojić, 2012; Gardijan e Škrinjarić, 2015) e fazem-no mensalmente, trimestralmente ou anualmente. Todos os autores que recompõem as carteiras de investimento recorrem à metodologia DEA, consideram apenas as ações eficientes segundo a DEA e investem em proporções iguais nas mesmas. Lopes et al. (2011) também faz a recomposição da carteira de investimento com as ações consideradas eficientes através da metodologia DEA, mas utiliza duas abordagens de investimento, igual proporção entre as ações eficientes e otimização das ações eficientes através do modelo média-variância.

Autores	Método	Inputs	Outputs	Carteiras	Resultados
(Powers e McMullen, 2000)	DEA BCC.	PER, beta 60 meses, sigma 60 meses.	Lucro por ação e retorno 12, 36, 60 e 120 meses.	185 empresas de grande dimensão cotadas em bolsa.	Identifica 14 ações eficientes mas não compara com outras carteiras.
(A. Lopes et al., 2008)	DEA CCR com orientação para os <i>outputs</i> .	PER, beta 3 meses e desvio padrão 36 meses.	Lucro por ação, retorno 12, 36, 60 e 120 meses.	Índice IBrX 100, DEA com pesos iguais, e taxa de juro sem risco.	A carteira DEA foi selecionada em janeiro de 2001 e rebalanceada trimestralmente até junho de 2006. Gerou resultados superiores ao mercado e à taxa de juro sem risco.
(Lopes et al., 2011)	DEA <i>Assurance Region</i> e modelo média-variância.	PER, beta 60 meses e desvio padrão 36 meses.	Lucro por ação e retorno de 12, 24 e 36 meses.	Índice Ibovespa, DEA com pesos iguais e DEA otimizada com modelo média variância.	Carteiras selecionadas em janeiro de 2006 e rebalanceadas mensalmente até dezembro de 2008. A carteira DEA otimizada com modelo média variância obteve o melhor resultado.
(Gardijan e Kojić, 2012)	DEA CCR e BCC orientados para os <i>outputs</i> .	Variância, VaR e beta de 52 meses.	Retorno esperado mensal.	Índice CROBEX DEA com pesos iguais: CCR, BCC, CCR e BCC (sem beta) e CCR e BCC (sem VaR)	Selecionadas carteiras mensais de janeiro de 2004 a junho de 2012. As carteiras que incluem VaR como medida de risco obtiveram os melhores resultados.
(Junior et al., 2014)	DEA BCC com orientação para os <i>outputs</i> e maximização do rácio de Sharpe.	Beta 12, 24 e 36 meses.	Lucro por ação e retornos 12, 24 e 36 meses.	Índice Ibovespa, DEA com pesos iguais, Otimizada Sharpe e DEA otimizada Sharpe	Carteiras selecionadas em abril de 2010 e rebalanceadas mensalmente até março de 2013. A carteira que conjuga o modelo BCC e maximização do rácio de Sharpe demonstrou o melhor resultado.
(Gardijan e Škrinjarić, 2015)	DEA CCR e BCC com orientação para os <i>inputs</i> e para os <i>outputs</i> .	Desvio padrão, beta, <i>expected shortfall</i> e rácios de endividamento do trimestre anterior.	Retorno, alfa de Jensen, rácio de Sharpe e rácios financeiros .	Índice CROBEX, 4 carteiras CCR e 4 carteiras BCC (orientação e estratégia de seleção diferentes)	Carteiras selecionadas em outubro de 2007 e rebalanceadas anualmente até janeiro de 2014. As carteiras selecionadas com orientação para os <i>inputs</i> obtiveram retornos inferiores àquelas com orientação para os <i>outputs</i> .

Tabela 1 – Revisão da literatura que aplica DEA na seleção de carteiras de investimento.

Na escolha de *outputs*, o lucro por ação é considerado em vários estudos (Powers e McMullen, 2000; Lopes et al., 2008; Lopes et al., 2011; Junior et al., 2014), assim como o retorno das ações, a 12 e 24 e 36 meses (Lopes et al., 2011; Junior et al., 2014), também é

considerado o retorno das ações a 60 e 120 meses (Powers e McMullen, 2000; Lopes et al., 2008). Adicionalmente, Gardijan e Škrinjarić (2015) consideram como *outputs* o retorno, o Alfa de Jensen, o rácio de Sharpe e alguns rácios financeiros (retorno do ativo, retorno do capital próprio, etc.) do trimestre anterior, já Gardijan e Kojić (2012) utilizam como único *output* o retorno esperado mensal.

Na escolha de *inputs* foram utilizados o PER⁴, o beta e o desvio padrão de 60 meses (Powers e McMullen, 2000; Lopes et al., 2011). Lopes et al. (2008) também utilizaram o PER, contudo recorreram a medidas de risco diferentes: o beta do trimestre anterior e o desvio padrão de 36 meses. Já Junior et al. (2014) utilizaram os beta de 12, 24 e 36 meses, enquanto que Gardijan e Škrinjarić, (2015) utilizaram o desvio padrão, o beta, o *expected shortfall*⁵, e rácios de endividamento, do trimestre anterior. Por outro lado, Gardijan e Kojić (2012) utilizaram a variância, o VaR⁶ e o beta de 52 meses.

Os resultados da literatura revista na Tabela 1 demonstram que as carteiras construídas com recurso à metodologia DEA obtiveram um desempenho superior ao índice de mercado utilizado como *benchmark* em cada um dos diversos estudos. No estudo de Lopes et al., (2008) a carteira de investimento selecionada pela metodologia DEA obteve melhor desempenho do que o índice de mercado brasileiro. Noutros dois estudos (Lopes et al., 2011; Junior et al., 2014), as conclusões foram idênticas acrescentando que a otimização pelo modelo média-variância da carteira construída pela metodologia DEA gera resultados superiores. No mercado croata também as carteiras construídas através da metodologia DEA geraram resultados superiores ao índice de mercado, observando-se que no estudo de Gardijan e Kojić (2012), as carteiras que utilizaram como *inputs* a medida de risco VaR obtiveram um desempenho superior, enquanto que no estudo de Gardijan e Škrinjarić (2015) as carteiras construídas pela metodologia DEA com orientação para os *outputs* obtiveram melhor resultados do que as com orientação para os *inputs*.

2.2.4 Considerações Finais

Dyson et al. (2001) apresentaram um conjunto de fatores a ter em consideração na implementação da metodologia DEA, dentro dos quais destacam a homogeneidade das

⁴ *Price Earnings Ratio* – corresponde ao rácio entre o preço por ação e o lucro por ação.

⁵ *Expected Shortfall* – é uma medida de risco estimada pela média das perdas compreendidas entre o pior resultado até ao percentil VaR (*Value at Risk*) (Francis e Kim, 2013).

⁶ *Value at Risk* – é uma medida de risco que quantifica a perda máxima esperada de uma carteira de investimento, num determinado período, sob condições de funcionamento normal do mercado (Francis e Kim, 2013).

DMUs em análise, a seleção de *inputs* e *ouputs*, a escala em que são apresentados os dados e os pesos atribuídos aos mesmos. Também Cook et al. (2014) mencionam um conjunto de considerações importantes que devem ser tidas em conta antes da implementação da metodologia DEA, como a orientação do modelo, a seleção do conjunto de *inputs* e *ouputs*, o tipo de dados utilizado e o número de *inputs* e *ouputs* versus o número de DMUs no modelo.

A metodologia DEA pode ser aplicada a problemas que envolvam um processo de produção, mas também a problemas de *benchmarking*, sendo mais óbvia a classificação de *inputs* e de *ouputs* no primeiro tipo de problema. Contudo, geralmente é possível identificar-se um *input* como algo que se pretende minimizar e um *output* como algo que se pretende maximizar (Cook et al. 2014).

A orientação do modelo também é um fator importante a considerar e deve depender do problema que se pretende resolver, sendo possível formular um problema com orientação para os *inputs*, para os *ouputs*, ou para ambos. Contudo, no problema específico de *benchmarking*, qualquer que seja a orientação do modelo e assumindo os mesmos retornos à escala, gerará a mesma fronteira de melhores práticas (Cook et al. 2014).

Aparentemente não é consensual qual o número de DMUs necessário para que os resultados atingidos através da metodologia DEA sejam considerados satisfatórios. Cook et al. (2014) referem que a utilização de um número demasiado elevado de *inputs* e *ouputs* face ao número de DMUs retira poder discriminatório à análise. Dyson et al. (2001) consideram que o número de DMUs deve ser pelo menos o dobro do produto dos *inputs* com os *ouputs*, já Banker et al. (1989) referem que o número de DMUs deve ser pelo menos três vezes superior ao número de *inputs* e *ouputs* e por fim Ramanathan (2003) indica que o número de DMUs deve ser duas a três vezes superior ao número de *inputs* e *ouputs*. Cook et al. (2014) mencionam que o peso do tamanho da amostra, contrariamente ao que acontece em regressões estatísticas, pode mesmo ser imaterial quando a metodologia DEA é utilizada para resolver problemas de *benchmarking*.

Dyson et al. (2001) referem que os *scores* de eficiência obtidos através da DEA podem ser enganadores quando os *inputs* e os *ouputs* tomam simultaneamente a forma de índice ou rácio e dados em bruto. Contudo, Cook et al. (2014) afirmam que se os rácios forem devidamente justificados, ou se não se repetirem fatores nos *inputs* e nos *ouputs*, é possível conciliar ambos os tipos de dados no modelo.

3 Metodologia

Nesta secção descreve-se a resolução de um problema de seleção de carteiras de investimento recorrendo à metodologia DEA e posterior otimização com recurso à TMP, designadamente utilizando os modelos média-variância e média-semivariância com os *targets* retorno médio e retorno nulo. É também descrito o processo de recolha e tratamento de dados.

3.1 Estratégia de Investigação e Dados

Para dar resposta às questões de investigação referidas na secção 1, utilizou-se o índice DJI como representativo do mercado Norte Americano. O DJI é uma média ponderada pelo preço de 30 empresas *blue chip*⁷ norte americanas. A escolha deste índice em detrimento dos outros dois índices que representam o mercado dos EUA, isto é, o *S&P 500* e o *Nasdaq Composite*, foi motivada pela sua conveniência na recolha, tratamento e análise de dados, uma vez que a dimensão dos três índices é diferente, respetivamente, 30 empresas, 500 empresas e mais de 2500 empresas. Outra razão para justificar a escolha foi não ter identificado literatura que conciliasse as metodologias DEA e TMP aplicadas à seleção e otimização de carteiras de investimento utilizando como base o índice DJI (ver Tabela 1).

Na obtenção de informação foram utilizadas as bases de dados *Yahoo Finance* e *Reuters*. A base de dados *Yahoo Finance* foi utilizada para extrair as cotações de fecho ajustadas⁸ do índice DJI e das respetivas empresas constituintes no período em análise. Os movimentos de entradas e saídas das empresas constituintes do DJI no período em análise, assim como as respetivas demonstrações de resultados foram acedidas através da base de dados *Reuters*.

O período dos dados utilizados situa-se entre 1 de janeiro de 2015 e 31 de dezembro de 2020, com periodicidade mensal, e a análise foi efetuada para os anos 2018 a 2020. Este período foi escolhido pela atualidade dos dados e também porque permite analisar como é que as carteiras de investimento se comportam num ciclo de crescimento económico, como

⁷ *Blue Chip* – Empresa reconhecida, bem estabelecida e financeiramente sólida. Estas empresas geralmente vendem produtos e serviços de alta qualidade e com grande aceitação, permitindo-lhes enfrentar situações económicas adversas e conduzindo a um longo histórico de crescimento estável e fiável. Adaptado de <https://www.investopedia.com/terms/b/bluechip.asp> (consultado em 13 de maio de 2021).

⁸ Cotações de fecho ajustadas – Preço de um valor mobiliário a que se efetuou a última transação numa determinada sessão no mercado bolsista, corrigido de variações resultantes de desdobramentos de ações (*stock splits*) e distribuição de dividendos (disponível em <https://finance.yahoo.com/quote/%5EDJI/history?p=%5EDJI>; consultado em 13 de maio de 2021). As cotações de fecho ajustadas permitem a análise ao longo do tempo das variações da cotação da ação.

o que foi verificado entre 2018 e 2020, assim como numa correção como a verificada em abril de 2020.

Empresa		2018				2019				2020			
Ticker	Id	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT
MMM	1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
AXP	2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
BA	3	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
CAT	4	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
KO	5	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
XOM	6	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗
GE	7	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
IBM	8	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
JPM	9	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
MCD	10	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
MRK	11	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
PG	12	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
RTX	13	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗
DIS	14	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
JNJ	15	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
WMT	16	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
HD	17	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
INTC	18	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
MSFT	19	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
PFE	20	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗
VZ	21	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
CVX	22	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
CSCO	23	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
TRV	24	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
UNH	25	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
GS	26	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
NKE	27	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
V	28	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
AAPL	29	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
DD	30	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗
WBA	31	✗	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
AMGN	32	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓
HON	33	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓
CRM	34	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓
DOW	35	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Tabela 2 – Empresas constituintes do DJI no início de cada trimestre em 2018, 2019 e 2020.

Legenda: ✓ - pertence ao índice; ✗ - não pertence ao índice.

A Tabela 2 considera que as empresas que fazem parte do índice DJI no último dia do mês anterior ao trimestre em análise também fazem parte do índice durante o respetivo trimestre. Isto acontece porque o rebalanceamento das carteiras de investimento efetuou-se com base no último dia do mês anterior ao trimestre em análise em que foi possível transacionar no mercado. Ainda relativamente aos constituintes do DJI, não foi considerada a entrada da empresa DOW (Id 35) para efeito de rebalanceamento da carteira a partir do 3.º trimestre de 2019, uma vez que não existiam dados disponíveis para o cálculo de todos os *inputs* e *outputs* para a implementação das metodologias DEA e TMP. Para manter a comparabilidade das carteiras de investimento calculadas face ao DJI, decidiu remover-se a empresa DD (Id 30) a partir do 3.º trimestre de 2019, ficando a amostra com 29 empresas até ao fim do período em análise. O motivo para tal prende-se com o facto de a empresa DD se ter dividido em 3 empresas, DD, CTVA e DOW, tendo sido substituída no 3.º trimestre de 2019 pela DOW no índice DJI.

3.2 Metodologia DEA

Na implementação da metodologia DEA para seleção de carteiras de investimento foi escolhido o modelo BCC ou VRS (*Variable Returns to Scale*). Outro modelo também utilizado na literatura é o CCR ou CRS (*Constante Returns to Scale*), mas este apresenta maior risco de apenas uma ação ser eficiente. Optar pelo BCC evita assumir o pressuposto de rendimentos constantes à escala e permite maior liberdade de escolha da carteira de investimento por considerar mais ações eficientes.

A metodologia DEA foi utilizada numa lógica de *benchmarking*, utilizando-se como *inputs* os indicadores que se pretendem minimizar e como *outputs* os indicadores que se pretendem maximizar (Tabela 3). Consideraram-se como *inputs* o *Price Earnings Ratio* (PER) de 12 meses (Powers e McMullen, 2000; Lopes et al., 2008; Lopes et al., 2011) e os betas de 12, 24 e 36 meses (Junior et al., 2014), calculados com base em retornos diários. Selecionaram-se como *outputs* os retornos a 12, 24 e 36 meses (Lopes et al., 2011; Junior et al., 2014). Pese embora o lucro por ação tenha sido utilizado como *output* em vários estudos (Powers e McMullen, 2000; Lopes et al., 2008; Lopes et al., 2011; Junior et al., 2014), não vai ser utilizado nesta dissertação, uma vez que o lucro por ação integra o rácio do PER. Adicionalmente, este indicador tem limitações, designadamente a facilidade de manipulação pela própria empresa com operações de compra e venda de ações, assim como não envolve

o preço da ação em causa e, por esta razão, não permite obter indicações sobre a potencial subavaliação ou sobreavaliação de uma empresa.

Indicador	Tipo	Cálculo
PER	Input	$\frac{P_i}{\text{Lucro por ação}}$
β_{12}	Input	$\frac{cov(R_i, R_M)}{\sigma^2(R_M)}$
β_{24}	Input	$\frac{cov(R_i, R_M)}{\sigma^2(R_M)}$
β_{36}	Input	$\frac{cov(R_i, R_M)}{\sigma^2(R_M)}$
R_{12}	Output	$\frac{(P_{t-1} - P_{t-13})}{P_{t-13}}$
R_{24}	Output	$\frac{(P_{t-1} - P_{t-25})}{P_{t-25}}$
R_{36}	Output	$\frac{(P_{t-1} - P_{t-37})}{P_{t-37}}$

Tabela 3 – Classificação e cálculo dos *inputs* e *outputs*.

O cálculo do PER para o mês em análise t tem por base a cotação do último dia do mês $t-1$, P_i , e o lucro por ação dos últimos 12 meses. Para o cálculo dos retornos R_t do mês em análise t , são utilizadas as cotações do último dia útil dos meses $t-1$ e $t-13$, $t-25$ e $t-37$, respetivamente, para os retornos dos últimos 12, 24 e 36 meses. No cálculo dos β_t do mês em análise t , tanto os retornos de cada ação R_i como os retornos do mercado DJI R_M têm por base o intervalo de retornos diário entre o último dia do mês $t-1$ e o último dia dos meses $t-13$, $t-25$ e $t-37$, respetivamente, para os betas dos últimos 12, 24 e 36 meses.

Os *inputs* e *outputs* foram calculados para cada uma das DMUs com referência ao primeiro mês de cada um dos 12 trimestres desde 1 de janeiro de 2018 a 31 de dezembro de 2020, usando para tal apenas informação anterior a esse mesmo mês. Até ao 2.º trimestre de 2019, estes indicadores foram calculados para 30 DMUs e a partir do 3.º trimestre de 2019 foram calculados para 29 DMUs.

Os modelos clássicos DEA, incluindo o BCC, não aceitam *inputs* e *outputs* negativos. Por esta razão, e uma vez que foram obtidos retornos e PER negativos em várias DMUs e em vários meses, procedeu-se a uma translação dos dados:

$$RZ_{ji} = - \min_{k=1, \dots, n} Z_{ki} + Z_{ji} \quad j = 1, \dots, n \quad (29)$$

RZ_{ji} é o resultado da translação para o *input* ou *output* i para a DMU j

Z_{ji} corresponde ao valor do *input* ou *output* i para a DMU j

O procedimento seguinte foi a normalização dos dados entre 0 e 1:

$$MRZ_{ji} = \frac{RZ_{ji}}{\max_{k=1,\dots,n} RZ_{ki}} \quad (30)$$

MRZ_{ji} é o resultado da normalização do *input* ou *output* i para a DMU j .

Após a translação e normalização dos *inputs* e *outputs* para cada DMU j e para o 1.º mês de cada um dos 12 trimestres, procedeu-se à seleção das DMUs eficientes em cada trimestre. Para identificar as ações eficientes segundo o modelo BCC foi utilizado o pacote *Benchmarking* do *software* R.

Para cada um dos 12 trimestres foi gerado um ficheiro codificado como DataAnoTrimestre que serviu como base de dados para o R. Os *inputs* e *outputs* também foram codificados.

Indicador	Código
PER	PER
β_{12}	B12M
β_{24}	B24M
β_{36}	B36M
R_{12}	R12M
R_{24}	R24M
R_{36}	R36M

Tabela 4 – Codificação dos inputs e outputs para o R.

Definiram-se os *inputs* e *outputs* como as variáveis x e y , respetivamente:

```
x<- with(data201801, cbind(PER,B12M,B24M,B36M))
y<- with(data201801, cbind(R12M,R24M,R36M))
```

Para o cálculo da eficiência definiu-se a variável BCC como sendo a função *dea*, com os parâmetros *inputs* x e *outputs* y , utilizando o modelo *vrs* (*variable returns to scale*) e orientação para os *inputs*:

```
bcc<-dea(x,y, RTS = "vrs", ORIENTATION = "in")
bcc
```

Por fim, calculou-se a eficiência utilizando a função *eff* e utilizou-se a função *data.frame* para melhor interpretação dos resultados:

```
eff(bcc)
data.frame(bcc$eff)
```

Após efetuado o cálculo da eficiência para cada um dos 12 trimestres procedeu-se ao cálculo dos retornos da carteira DEA (na qual apenas entram ações que sejam DMUs eficientes) com pesos distribuídos de forma igual por cada ação constituinte ($DEA_{1/N}$) e comparou-se com os retornos do índice DJI.

Os retornos trimestrais R_τ foram calculados com base nas cotações do primeiro e do último dia de transações no mercado $P_{\tau I}$ e $P_{\tau F}$, respetivamente, do trimestre τ em análise.

$$R_\tau = \frac{(P_{\tau F} - P_{\tau I})}{P_{\tau I}} \quad (31)$$

3.3 Metodologia TMP

As ações constituintes das carteiras de investimento $DEA_{1/N}$ e DJI foram também utilizadas como potenciais escolhas para a seleção e otimização através da TMP. A carteira de investimento DJI é composta pelo conjunto das ações que constituem o índice DJI, exceto a empresa DOW (ver secção 1.3) a partir do 3.º trimestre de 2019, passando a carteira a ter 29 empresas.

Primeiramente recorreu-se ao modelo média-variância para otimizar, separadamente, as carteiras de investimento compostas pelas ações pertencentes a $DEA_{1/N}$ (apenas as ações eficientes) e por todas as ações pertencentes a DJI, obtendo-se as carteiras DEA_{MV} e DJI_{MV} . Estas carteiras de investimento foram selecionadas no 1.º trimestre de 2018 e rebalanceadas no final de cada trimestre até ao 4.º trimestre de 2020, à semelhança do sucedido com a carteira $DEA_{1/N}$. Para a implementação do modelo média-variância foram calculados os retornos esperados de cada ação i , das carteiras de investimento $DEA_{1/N}$ e DJI, para cada trimestre em análise, com base no histórico de retornos mensais dos 36 meses anteriores:

$$E(R_i) = \sum_{t=1}^{36} \frac{R_{it}}{36} \quad (32)$$

Nesta equação e na seguinte, $E(R_i)$ designa o retorno esperado da ação i para o trimestre em análise τ (omitido na notação) e R_{it} designa o retorno da ação i no t -ésimo mês anterior ao início do trimestre τ (por exemplo, para o 4.º trimestre de 2020 R_{i1} designa o retorno da ação i em setembro de 2020, R_{i2} designa o retorno em agosto de 2020, etc.). De seguida

calculou-se a matriz de covariância com base no histórico de retornos dos 36 meses anteriores para todos os trimestres, para todas as combinações de ações i e j :

$$\sigma_{ij} = \sum_{t=1}^{36} \frac{(R_{it} - E(R_i))(R_{jt} - E(R_j))}{36} \quad (33)$$

Tendo por base os R_i e as matrizes de covariância para cada trimestre τ , procedeu-se à seleção e otimização das carteiras de investimento DEA_{MV} e DJI_{MV} . Foi utilizada a abordagem de maximização do Rácio de Sharpe.

De modo a maximizar o prémio de risco por unidade de volatilidade ou risco total, foi necessário obter as taxas de juro sem risco. Para tal, foram consideradas as *United States Government 1 Month Treasury Yield Curve Rates*, acedidas a partir do sítio oficial da internet do U.S Department of Treasury. Para o cálculo da taxa de juro sem risco do trimestre τ , foi considerada a média das taxas de juro sem risco do mês anterior.

O retorno esperado da carteira de investimento em cada trimestre $E(R_p)$ teve por base a ponderação dos retornos esperados de cada ação i , $E(R_i)$, obtidos na equação (32) e foi calculado de acordo com a equação (2). A variância da carteira de investimento σ_p^2 no trimestre τ foi calculada com base nos pesos de cada ação na respetiva carteira e na matriz de covariâncias do trimestre em análise conforme a equação (7).

A resolução do problema de otimização foi efetuada através do *add-in Solver* do *Microsoft Excel* de acordo com:

$$\max SR_p = \frac{R_p - r_f}{\sqrt{\sigma_p^2}} \quad (34)$$

Sujeito às restrições:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 1 \quad (35)$$

$$X_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$$

Nos trimestres em que o rácio de Sharpe foi negativo utilizou-se a adaptação de Israelsen (2005) por forma a manter a comparabilidade dos resultados. Esta adaptação mantém a definição original do rácio de Sharpe quando o numerador é não negativo e, quando este assume valores negativos, utiliza a seguinte expressão:

$$\max SR_{P(Israelsen)} = (R_P - r_f) * \sqrt{\sigma_P^2} \quad (36)$$

Após a seleção e rebalanceamento das ações para a composição das carteiras de investimento DEA_{MV} (apenas as eficientes) e DJI_{MV} foram calculados os retornos trimestrais à semelhança do que tinha sido feito para a carteira $DEA_{1/N}$ de acordo com a equação (31).

Posteriormente aplicou-se o modelo média-semivariância, mais concretamente a aproximação de Estrada (2007) às carteiras $DEA_{1/N}$ e DJI . Foi utilizada a semivariância (semi-desvio padrão) como medida de risco e consideraram-se como *targets* o retorno médio e o retorno nulo. Da aplicação deste modelo surgiram as carteiras $DEA_{SV\mu}$, $DJI_{SV\mu}$, DEA_{SV0} e DJI_{SV0} .

Os retornos esperados $E(R_i)$ para cada ação i e para cada trimestre τ em análise foram obtidos de forma semelhante ao sucedido no modelo média-variância (ver equação (32)). As matrizes de semivariância para os *targets* retorno médio e retorno nulo, foram calculadas de acordo com a heurística de Estrada (2007) com base no histórico de retornos dos últimos 36 meses para todos os 12 trimestres e combinações de ações i e j conforme a equação (16). Após calculada a matriz de semicovariância Σ_{ijB} calculou-se a semivariância da carteira de investimento Σ_{pB}^2 recorrendo às ponderações de cada ação na carteira e à matriz de semicovariância de acordo com a equação (17).

Tendo por base os R_i e as matrizes de semicovariância para cada trimestre, procedeu-se à seleção e otimização das carteiras de investimento $DEA_{SV\mu}$, $DJI_{SV\mu}$, DEA_{SV0} e DJI_{SV0} . Foi utilizada a abordagem de maximização do Rácio de Sortino:

$$\max SOR_P = \frac{R_P - r_f}{\sqrt{\Sigma_{pB}^2}} \quad (37)$$

Sujeito às restrições:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 1 \quad (38)$$

$$X_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$$

Após a seleção e rebalanceamento das ações eficientes para a composição das carteiras de investimento $DEA_{SV\mu}$, $DJI_{SV\mu}$, DEA_{SV0} e DJI_{SV0} foram calculados os retornos trimestrais à semelhança do que tinha sido feito para a carteiras $DEA_{1/N}$, DEA_{MV} e DJI_{MV} de acordo com a equação (31).

No final são comparados os retornos trimestrais e cumulativos entre as 8 carteiras: índice DJI, $DEA_{1/N}$, DEA_{MV} , DJI_{MV} , $DEA_{SV\mu}$, $DJI_{SV\mu}$, DEA_{SV0} e DJI_{SV0} .

4 Resultados

Nesta secção serão apresentados e discutidos os resultados da aplicação das metodologias DEA e TMP. Serão apresentadas as ações consideradas eficientes pela aplicação do modelo BCC e comparados os retornos trimestrais e cumulativos das 7 carteiras de investimento, construídas nesta dissertação, e do índice de mercado DJI.

4.1 Resultados DEA

As ações consideradas como eficientes, em cada um dos 12 trimestres em análise, com a aplicação do modelo BCC orientado para os *inputs*, são apresentadas na Tabela 5. A Tabela 10, em apêndice, apresenta mais em detalhe o score de eficiência de cada DMU em cada trimestre.

Verifica-se que o número de ações do índice DJI consideradas eficientes varia nos 12 trimestres em análise, entre 5 e 15, no 4.º trimestre de 2020 e no 3.º trimestre de 2019, respetivamente.

4.2 Resultados das Carteiras de Investimento

Os resultados da resolução do modelo média-variância assim como o retorno da carteira de investimento por unidade de risco para o índice DJI e para a carteira $DEA_{1/N}$, são apresentados na Tabela 14 em apêndice. Na Tabela 15, em apêndice, são apresentados os resultados da aplicação do modelo média-semivariância, com o respetivo retorno esperado ótimo por unidade de risco para as carteiras de investimento otimizadas, isto é, o rácio de Sortino. A taxa de juro sem risco, assim como os resultados intermédios necessários para a otimização (retorno esperado e volatilidade) são apresentados em apêndice, na Tabela 11, Tabela 12 e Tabela 13, respetivamente.

Os retornos efetivos das 8 carteiras de investimento nos 12 trimestres em análise são apresentados na Tabela 6.

Empresa		2018				2019				2020			
Ticker	Id	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT
MMM	1	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
AXP	2	×	×	×	×	×	×	✓	×	×	×	×	×
BA	3	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	×	✓
CAT	4	✓	×	×	×	✓	✓	×	×	×	×	×	×
KO	5	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	×
XOM	6	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	
GE	7	✓	✓										
IBM	8	×	×	×	×	✓	×	×	×	✓	✓	×	×
JPM	9	×	×	×	×	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	×
MCD	10	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	×	×	×
MRK	11	×	×	×	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	×	×
PG	12	×	✓	✓	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
RTX	13	×	×	×	×	✓	×	×	×	×	×	×	
DIS	14	×	×	×	×	×	×	✓	×	×	×	×	×
JNJ	15	×	×	×	×	×	×	✓	×	×	×	×	×
WMT	16	✓	✓	✓	✓	×	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓
HD	17	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
INTC	18	×	×	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	×
MSFT	19	×	✓	✓	✓	×	×	✓	✓	✓	✓	✓	×
PFE	20	×	×	×	✓	✓	×	×	×	×	×	×	
VZ	21	×	×	✓	✓	✓	✓	×	✓	✓	✓	✓	✓
CVX	22	×	×	×	×	×	×	✓	×	×	×	✓	×
CSCO	23	×	×	×	✓	×	×	×	×	×	×	×	×
TRV	24	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
UNH	25	✓	×	✓	✓	✓	×	×	×	×	×	×	×
GS	26	×	×	×	×	✓	✓	×	✓	✓	✓	×	×
NKE	27	×	×	✓	✓	×	×	✓	✓	×	×	×	×
V	28	×	×	✓	×	×	×	✓	×	✓	×	×	×
AAPL	29	×	×	✓	✓	×	×	✓	×	✓	✓	✓	✓
DD	30	✓	×	✓	✓	×	×						
WBA	31			×	×	×	×	×	✓	×	×	×	×
AMGN	32												×
HON	33												×
CRM	34												×
DOW	35												
DMUs Eficientes		8	7	13	14	13	10	15	12	13	9	6	5

Tabela 5 – Resultados da aplicação do modelo DEA BCC às ações constituintes do DJI nos 12 trimestres em análise. Legenda: ✓ - eficiente; × - não eficiente.

Período	Retornos da Carteira							
	DJI	DJIMV	DJISV0	DJISVμ	DEA _{1/N}	DEAMV	DEASV0	DEASVμ
2018 T1	-2,90%	1,75%	-4,03%	-0,63%	-6,83%	-0,79%	-4,03%	-0,83%
2018 T2	2,65%	6,92%	6,81%	7,47%	3,90%	8,72%	9,14%	9,07%
2018 T3	8,85%	12,89%	13,09%	12,85%	8,56%	12,89%	13,09%	12,85%
2018 T4	-12,47%	-13,95%	-13,44%	-13,61%	-5,04%	-13,64%	-13,39%	-13,61%
2019 T1	11,06%	18,38%	18,38%	18,38%	9,78%	18,38%	18,38%	18,38%
2019 T2	1,30%	-6,50%	-6,50%	-6,50%	1,80%	-6,50%	-6,50%	-6,50%
2019 T3	0,75%	3,30%	2,81%	2,81%	3,18%	3,30%	2,81%	2,81%
2019 T4	7,40%	2,50%	6,74%	7,55%	6,61%	2,50%	6,74%	7,55%
2020 T1	-24,08%	-4,23%	-1,65%	-1,54%	-15,89%	-3,42%	-1,65%	-1,54%
2020 T2	23,25%	29,94%	29,47%	30,51%	20,18%	29,94%	29,47%	30,51%
2020 T3	7,95%	3,00%	4,34%	4,04%	9,63%	5,88%	4,34%	4,04%
2020 T4	10,03%	4,82%	4,25%	4,38%	8,56%	2,70%	2,98%	2,75%
Média	2,82%	4,90%	5,02%	5,48%	3,70%	5,00%	5,11%	5,46%
Desvio Padrão	11,61%	11,06%	11,00%	11,03%	9,01%	11,09%	11,06%	11,10%
Máximo	23,25%	29,94%	29,47%	30,51%	20,18%	29,94%	29,47%	30,51%
Mínimo	-24,08%	-13,95%	-13,44%	-13,61%	-15,89%	-13,64%	-13,39%	-13,61%

Tabela 6 – Retornos das carteiras de investimento nos 12 trimestres em análise.

O desempenho efetivo das carteiras de investimento comportou-se de forma ligeiramente diferente ao verificado no retorno esperado por unidade de risco, isto quando verificamos os retornos médios trimestrais. A carteira com o pior retorno médio trimestral foi o índice DJI, seguindo-se a carteira DEA_{1/N}, DJIMV, DEAMV, DJISV0, DEASV0, DEASVμ e DJISVμ. Desta forma, verifica-se que as carteiras otimizadas através do modelo média-semivariância com *target* retorno médio, superam em média as com *target* retorno nulo. Verifica-se também que os modelos média-variância e média-semivariância com *target* retorno nulo geram retornos médios trimestrais superiores quando aplicados às ações consideradas eficientes pela DEA face às ações constituintes do índice DJI. No caso particular da aplicação do modelo média-semivariância com *target* retorno médio, a carteira DJISVμ obteve melhor desempenho que a carteira DEASVμ, ainda que a diferença tenha sido muito pequena.

Relativamente ao risco, a carteira $DEA_{1/N}$ é a que evidencia o desvio padrão inferior, estando este cerca de 2,60% e 2,09% abaixo do correspondente ao índice DJI e à carteira $DEA_{SV\mu}$, respetivamente. A variação do desvio padrão entre a carteira otimizada com maior risco, $DEA_{SV\mu}$, e a carteira otimizada com menor risco, DJI_{SV0} , é de 0,10%.

Dos 12 trimestres em análise, em 6 deles uma das carteiras de investimento teve um retorno superior às restantes, verificando-se que em 5 trimestres duas carteiras atingiram o retorno máximo do trimestre em simultâneo e no 1.º trimestre de 2019 as carteiras de investimento otimizadas através dos modelos da média-variância e média-semivariância obtiveram em simultâneo o melhor retorno. Apesar de ser a carteira com o pior desempenho trimestral, em média, o índice DJI obteve o melhor retorno no 12.º trimestre. A carteira DJI_{MV} foi a única a obter um retorno positivo no 1.º trimestre e a carteira $DEA_{1/N}$ foi a que obteve o melhor retorno no 4.º trimestre (ainda que negativo), no 6.º trimestre e no 11.º trimestre. Já a carteira DEA_{SV0} foi a melhor no 2.º trimestre. Nos 3.º e 7.º trimestres, as carteiras otimizadas pelos modelos média-semivariância com *target* retorno nulo e média-variância, respetivamente, foram as que obtiveram o melhor retorno. Já nos 8.º, 9.º e 10.º trimestres as carteiras otimizadas pelo modelo média-semivariância com *target* retorno médio foram as que obtiveram o melhor retorno. As carteiras que tiveram pior desempenho nos trimestres, isto é, retorno inferior, foram a carteira $DEA_{1/N}$ nos 1.º, 3.º, 5.º e 10.º trimestres, o índice DJI nos 2.º, 7.º e 9.º trimestres, as carteiras DJI_{MV} nos 4.º e 11.º trimestres e a carteira DEA_{MV} no 12.º trimestre. No 6.º trimestre, as carteiras otimizadas obtiveram um retorno igual, correspondendo ao pior desempenho do trimestre, e no 8.º trimestre as carteiras otimizadas pelo modelo média-variância foram as que obtiveram o retorno inferior.

No 1.º trimestre de 2020 as carteiras DJI e $DEA_{1/N}$ obtiveram os retornos mínimos do período em análise, acompanhando assim a queda na bolsa de valores ocorrida no fim de fevereiro e em março. Também as carteiras otimizadas sofreram uma ligeira correção, todavia numa dimensão inferior, tendo estas gerado retornos trimestrais mínimos no 4.º trimestre de 2018. A diferença entre o retorno trimestral mínimo observado na carteira DJI (-24,08%) e o retorno trimestral mínimo observado nas carteiras $DJI_{SV\mu}$ e $DEA_{SV\mu}$ (-13,61%) foi de -10,47%. Após a correção verificada no 1.º trimestre de 2020 observou-se uma recuperação bastante significativa até ao final do ano. As carteiras DJI e DEA geraram retornos, no ano 2020, de 11% e 20%, respetivamente, enquanto que as carteiras otimizadas geraram retornos entre os 34% (DJI_{MV}) e os 40% (DJI_{SVu}).

No 2.º trimestre de 2020 verificaram-se os retornos trimestrais máximos para todas as carteiras. Ainda assim, as carteiras $DJI_{SV\mu}$ e $DEA_{SV\mu}$ foram as que obtiveram o retorno mais

elevado (30,51%). A diferença entre o retorno trimestral máximo destas carteiras e o retorno trimestral máximo da carteira DJI (23,25%) foi de 7,26%.

Na Tabela 7 são apresentados os retornos anuais e a *Compound Annual Growth Rate* (CAGR) ou taxa de crescimento anual composta, das 8 carteiras de investimento para os 3 anos em análise.

Ano	Retornos da Carteira por ano							
	DJI	DJIMV	DJISV0	DJISVμ	DEA1/N	DEAMV	DEASV0	DEASVμ
2018	-5,04%	5,68%	0,34%	4,11%	-0,20%	5,15%	2,58%	5,45%
2019	21,73%	17,21%	21,48%	22,39%	22,94%	17,20%	21,48%	22,39%
2020	11,14%	34,35%	38,51%	39,55%	20,31%	36,48%	36,81%	37,37%
CAGR	8,71%	18,50%	19,07%	21,15%	13,86%	18,92%	19,46%	21,03%

Tabela 7 – Retornos das carteiras de investimento por ano, e retorno anualizado.

Em 2018 observaram-se os retornos mais baixos em todas as carteiras, sendo que as carteiras DJI e DEA_{1/N} foram as que obtiveram pior desempenho, -5,04% e -0,20%, respetivamente. Os melhores desempenhos em 2018 foram obtidos pelas carteiras DJIMV, DEASVμ e DEAMV, respetivamente, 5,68%, 5,45% e 5,15%.

As carteiras DJI e DEA_{1/N} obtiveram melhor desempenho no ano 2019 face a 2020, enquanto que nas carteiras otimizadas sucedeu o contrário. Adicionalmente, a carteira DEA_{1/N} foi a que gerou o melhor retorno no ano 2019 e as carteiras DEAMV e DJIMV os piores. No ano 2020, a carteira DJI ficou claramente abaixo de todas as outras, verificando-se uma diferença de 28,40% e de 9,16% face à carteira que obteve o melhor desempenho DJISVμ e à carteira com o segundo pior desempenho DEA_{1/N}.

As carteiras otimizadas pelo modelo média-variância, DJIMV e DEAMV, obtiveram retornos anuais inferiores às carteiras otimizadas pelo modelo média-semivariância, exceto no ano 2018, em que geraram os 1.º e 3.º melhores retornos, respetivamente. As carteiras otimizadas pelo modelo média-semivariância com *target* retorno nulo geraram sempre retornos anuais inferiores às carteiras otimizadas com *target* retorno médio. A carteira DEASVμ gerou um retorno anual superior à carteira DJISVμ em 2018. Em 2019, ambas as carteiras geraram retornos anuais iguais e em 2020, a carteira DJISVμ obteve um desempenho superior à carteira DEASVμ.

No que respeita à CAGR, as carteiras otimizadas pelo modelo média-semivariância obtiveram um desempenho superior às otimizadas pelo modelo média-variância, que por sua

vez foram melhores que a carteira, não otimizada, composta pelas ações selecionadas através do modelo BCC, que foi superior ao índice DJI. Para a mesma abordagem de otimização as carteiras DEA foram sempre superiores às carteiras DJI, exceto quando aplicado o modelo média-semivariância com *target* retorno médio. A CAGR do índice DJI foi entre 1,6 a 2,4 vezes inferior à CAGR das restantes carteiras.

A Tabela 8 apresenta o rácio de Sharpe (*ex-post*) para as carteiras otimizadas pelo modelo-média-variância, assim como para o índice DJI e para a carteira $DEA_{I/N}$.

Período	Rácio de Sharpe (<i>ex-post</i>) da carteira			
	DJI	DJI _{MV}	DEA _{I/N}	DEA _{MV}
2018 – 2020	21,17%	41,10%	37,15%	41,83%

Tabela 8 – Rácios de Sharpe das carteiras no período entre 2018 e 2020.

Verifica-se que de todas as carteiras, o índice DJI obteve o rácio de Sharpe inferior, seguindo-se as carteiras $DEA_{I/N}$, DJI_{MV} e DEA_{MV}.

Na Tabela 9 são apresentados os rácios de Sortino (*ex-post*) para as carteiras de investimento otimizadas através do modelo média-semivariância. Os rácios de Sortino foram calculados com o mesmo *target* usado na constituição da carteira. Para as carteiras definidas usando a rentabilidade média como *target*, apresenta-se entre parêntesis o rácio de Sortino calculado com base num *target* de 0%, por forma a permitir a comparabilidade com os valores referentes às restantes carteiras.

Período	Rácio de Sortino (<i>ex-post</i>)			
	DJI _{sv0}	DJI _{svu}	DEA _{sv0}	DEA _{svu}
2018 – 2020	103,95%	72,11% (116,84%)	106,26%	71,44% (116,33%)

Tabela 9 – Rácios de Sortino das carteiras de investimento no período entre 2018 e 2020.

Nas carteiras otimizadas pelo modelo média-semivariância o Rácio de Sortino foi superior na carteira DJI_{svu}, seguindo-se DEA_{svu}, DEA_{sv0} e DJI_{sv0}.

A Figura 1 apresenta o retorno anual das 8 carteiras de investimento nos anos 2018, 2019 e 2020.

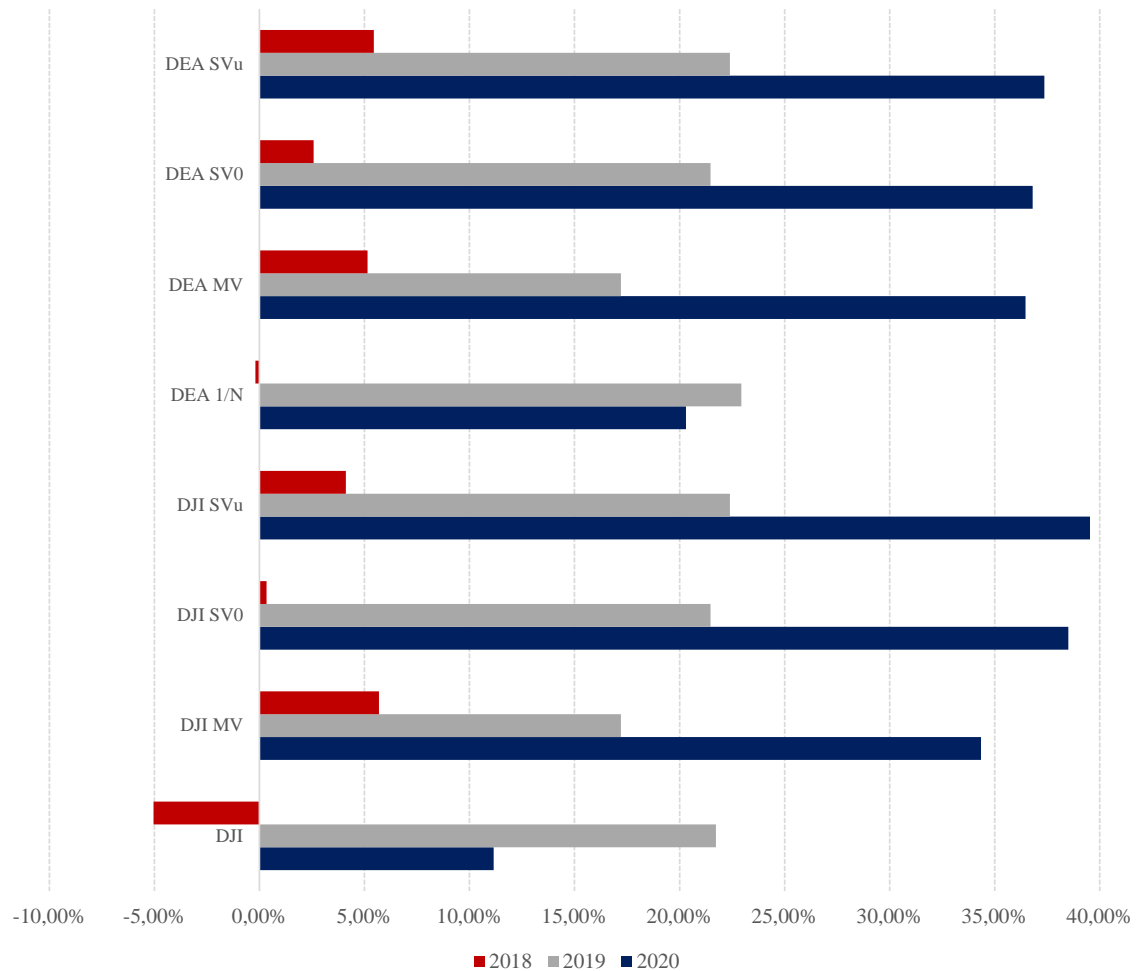


Figura 1 – Retorno anual das carteiras, nos anos 2018, 2019 e 2020.

Da análise à Figura 1 verifica-se que apenas as carteiras DJI e $DEA_{1/N}$, no ano 2018, geraram retornos negativos. Em 2019, as carteiras otimizadas pelo modelo média-variância e pelo modelo média-semivariância com *target* retorno nulo, obtiveram pior retorno que o índice DJI, contudo, esse foi o ano em que as restantes carteiras tiveram mais dificuldade em gerar retornos superiores ao mercado. Já em 2018 e em 2020, o índice DJI foi claramente batido pelas restantes carteiras.

A Figura 2 apresenta o retorno cumulativo das 8 carteiras de investimento assumindo o investimento de uma unidade monetária no dia 1 de janeiro de 2018 e o rebalanceamento trimestral até 31 de dezembro de 2020.

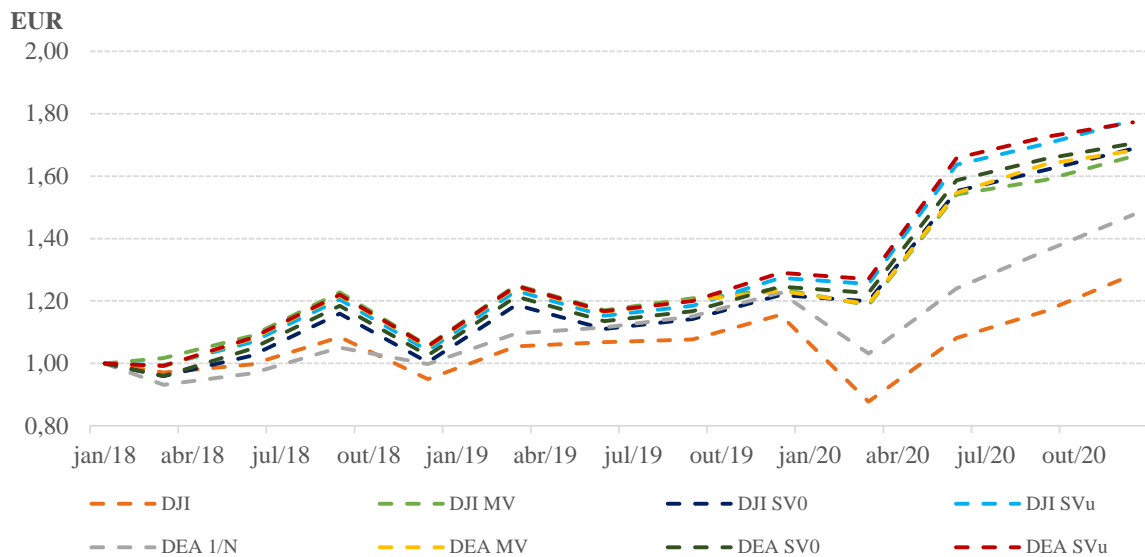


Figura 2 – Retorno cumulativo das carteiras de investimento no período entre 1 de janeiro de 2018 e 31 de dezembro de 2020.

O investimento de uma unidade monetária a 1 de janeiro de 2018 nas carteiras $DJISV_{\mu}$ e $DEASV_{\mu}$ gerou um retorno de 78% e 77%, respetivamente. As carteiras $DEASV_0$ e $DJISV_0$ geraram um retorno de 70% e 69%, respetivamente. As carteiras $DEAMV$ e $DJIMV$ obtiveram um retorno de 68% e 66%. O retorno da carteira $DEAI/N$ foi 48% enquanto que a carteira DJI obteve apenas 28%.

Importa referir que para a mesma otimização, as carteiras previamente selecionadas por DEA geraram retornos superiores às que utilizaram a totalidade das ações constituintes do índice DJI, exceto as carteiras otimizadas através do modelo média-semivariância com *target* retorno médio. Ainda assim, a carteira $DJISV_{\mu}$ gerou em todos os trimestres, exceto no último, um retorno inferior à carteira $DEASV_{\mu}$. É também fundamental mencionar que as carteiras otimizadas com os modelos média-variância e média-semivariância obtiveram retornos iguais em 6 e 9 trimestres, respetivamente, sendo que nos restantes trimestres as diferenças foram pouco significativas.

5 Conclusão

A carteira *benchmark*, isto é, o índice DJI, foi a que demonstrou maior risco, medido pelo desvio padrão, o pior retorno mensal médio, a maior desvalorização mensal e o pior retorno anualizado no período em análise. Ainda assim, no ano 2019 conseguiu um retorno anual superior a quatro das restantes sete carteiras de investimento.

A carteira $DEA_{1/N}$ foi a que demonstrou menor risco e excluindo o índice DJI foi a carteira que obteve o pior retorno mensal médio, gerou a maior desvalorização mensal e verificou o pior retorno anualizado. Ainda assim, no ano 2019 destacou-se por ser a carteira com melhor desempenho anual.

As carteiras otimizadas com o modelo média-variância, DJI_{MV} e DEA_{MV} , originaram um risco, uma maior desvalorização mensal e um retorno mensal médio semelhantes. Ainda assim, a carteira DEA_{MV} obteve melhor desempenho, tanto no retorno médio mensal como no retorno médio anual. Contudo, a carteira DJI_{MV} gerou um retorno anual superior em 2018 e em 2019.

As carteiras otimizadas pelo modelo média-semivariância, com *target* retorno nulo DJI_{SV0} e DEA_{SV0} demonstraram um risco semelhante, uma desvalorização mensal, um retorno médio mensal e um retorno anualizado inferiores às carteiras otimizadas pelo modelo média-semivariância com *target* retorno médio, DJI_{SVu} e DEA_{SVu} .

A comparação direta entre a carteira DJI_{MV} e a carteira $DEA_{1/N}$ mostrou que a utilização exclusiva da TMP, nomeadamente o modelo média-variância, gerou um retorno médio mensal e um retorno anualizado superior à carteira construída exclusivamente pela metodologia DEA. Contudo, importa referir que ambas as metodologias, DEA e TMP, quando aplicadas ao índice DJI, demonstraram contribuir para a obtenção de melhores resultados que o mercado.

Comparando a utilização das duas metodologias DEA e TMP em conjunto versus a utilização de cada uma individualmente verifica-se que no caso dos modelos média-variância e média-semivariância com *target* retorno nulo, a utilização das duas estratégias em conjunto gera um desempenho superior. Contrariamente, no modelo média-semivariância com *target* retorno médio, a utilização apenas da TMP gera um desempenho ligeiramente superior.

As carteiras otimizadas pelo modelo média-semivariância obtiveram um desempenho superior às carteiras obtidas pelo modelo média-variância, que por sua vez obtiveram um desempenho superior à carteira obtida através do modelo DEA, que obteve um desempenho superior à carteira *benchmark* DJI.

Os resultados deste estudo corroboram os resultados apresentados na revisão da literatura efetuada na Tabela 1, designadamente a contribuição da metodologia DEA para a obtenção de melhores resultados que o índice de mercado (Lopes et al., 2008; Lopes et al., 2011; Gardijan e Kojić, 2012; Junior et al., 2014; Gardijan e Škrinjarić, 2015), assim como a contribuição da aplicação da metodologia DEA e TMP, em conjunto, na obtenção de resultados superiores (Lopes et al., 2011; Junior et al., 2014).

As carteiras otimizadas pela TMP e as carteiras selecionadas por DEA e posteriormente otimizadas pela TMP podem ter captado um efeito *momentum*, considerando o baixo número de ações constituinte em cada trimestre e a valorização das mesmas. Este baixo número de ativos por carteira pode aumentar a dependência dos resultados obtidos de fatores aleatórios pontuais, e assim reduzir a confiança na robustez dos resultados. Portanto, torna-se ainda mais importante que esta metodologia seja aplicada a outros mercados e períodos, de maneira a verificar se os bons resultados obtidos se verificam de forma consistente.

Toda a análise é efetuada na ausência de custos de transação. A inclusão destes custos resultaria numa análise mais realista e pode mesmo resultar numa reordenação das estratégias de investimento em termos de rentabilidade média, rentabilidade acumulada e rácio de Sharpe.

Como sugestão para linhas de investigação futuras, poderá ser interessante a utilização de outros indicadores no modelo DEA, nomeadamente informação contabilística, também a utilização de outras medidas de risco como o Var, assim como a escolha de outro índice como *benchmark*, possivelmente o S&P500 pela sua relevância e dimensão.

Bibliografia

- Ahmadzade, M., Fazli, S., Khosroanjom, D., & Mavi, R. K. (2011). Utilising data envelopment analysis for selecting stock and benchmark firms in Tehran stock exchange. *International Journal of Operational Research*, 12(4).
- Aigner, D., Lovell, C. A. K., & Schmidt, P. (1977). Formulation and estimation of stochastic frontier production function models. *Journal of Econometrics*, 6(1), 21–37. [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(77\)90052-5](https://doi.org/10.1016/0304-4076(77)90052-5)
- Alexakis, P., & Tsolas, I. (2011). Appraisal of Mutual Equity Fund Performance Using Data Envelopment Analysis. *Multinational Finance Journal*, 15(3/4), 273–296. <https://doi.org/10.17578/15-3/4-5>
- Anderson, R. I., Brockman, C. M., & Mcleod, R. W. (2004). A Non-Parametric Examination of Real Estate Mutual Fund Efficiency. *International Journal of Business and Economics*, 3(3), 225–238.
- Babalos, V., Doumpos, M., Philippas, N., & Zopounidis, C. (2015). Towards a Holistic Approach for Mutual Fund Performance Appraisal. *Computational Economics*, 46(1), 35–53. <https://doi.org/10.1007/s10614-014-9450-y>
- Banker, R., Charnes, A., Cooper, W. W., Swarts, J., & Thomas, D. A. (1989). An introduction to data envelopment analysis with some of its models and their uses. *Research in Government and Nonprofit Accounting*, 125–163.
- Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, 30(9).
- Basso, A., & Funari, S. (2001). A data envelopment analysis approach to measure the mutual fund performance. *European Journal of Operational Research*, 135(3), 477–492. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(00\)00311-8](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(00)00311-8)
- Basso, A., & Funari, S. (2003). Measuring the Performance of Ethical Mutual Funds: A DEA Approach. *The Journal of the Operational Research Society*, 54(5), 521–531.
- Boasson, V., Boasson, E., & Zhou, Z. (2011). Portfolio optimization in a mean-semivariance framework. *Investment Management and Financial Innovations*, 8(3), 58–68.
- Brito, R. P., Sebastião, H., & Godinho, P. (2016). Efficient skewness/semivariance portfolios. *Journal of Asset Management*, 17(5), 331–346. <https://doi.org/10.1057/jam.2016.9>
- Campbell, J. Y., & Hentschel, L. (1992). No news is good news: An asymmetric model of changing volatility in stock returns. *Journal of Financial Economics*, 31(3), 281–318.

- Charnes, A., Cooper, W., Lewin, A. Y., & Seiford, L. M. (1994). *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Applications*. Kluwer.
- Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), 429–444. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(78\)90138-8](https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8)
- Chen, Z., & Lin, R. (2006). Mutual fund performance evaluation using data envelopment analysis with new risk measures. *OR Spectrum*, 28(3), 375–398. <https://doi.org/10.1007/s00291-005-0032-1>
- Choi, Y. K., & Murthi, B. P. S. (2001). Relative Performance Evaluation of Mutual Funds : A Non - Parametric Approach. *Journal of Business Finance & Accounting*, 28(7–8), 853–876.
- Cook, W. D., Tone, K., & Zhu, J. (2014). Data envelopment analysis: Prior to choosing a model. In *Omega (United Kingdom)* (Vol. 44). Elsevier.
- Cooper, W. W., Seiford, L. M., & Zhu, J. (2011). Handbook on Data Envelopment Analysis. In *Data envelopment analysis: History, models, and interpretations* (pp. 1–39). https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6151-8_1
- Debreu, G. (1951). The Coefficient of Resource Utilization. *Journal of the Econometric Society*, 19(3), 273–292. <http://www.jstor.com/stable/1906814>
- do Castelo Gouveia, M., Neves, E. D., Dias, L. C., & Antunes, C. H. (2018). Performance evaluation of Portuguese mutual fund portfolios using the value-based DEA method. *Journal of the Operational Research Society*, 69(10), 1628–1639. <https://doi.org/10.1057/s41274-017-0259-7>
- Dyson, R. G., Allen, R., Camanho, A. S., Podinovski, V. V., Sarrico, C. S., & Shale, E. A. (2001). Pitfalls and protocols in DEA. *European Journal of Operational Research*, 132(2), 245–259. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(00\)00149-1](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(00)00149-1)
- Elton, E. J., Gruber, M. J., Brown, J. S., & Goetzmann, W. N. (2014). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis* (9th ed.). Wiley.
- Emrouznejad, A., & Yang, G. (2018). A survey and analysis of the first 40 years of scholarly literature in DEA: 1978–2016. *Socio-Economic Planning Sciences*, 61, 4–8. <https://doi.org/10.1016/j.seps.2017.01.008>
- Estrada, J. (2006). Downside Risk in Practice. *Journal of Applied Corporate Finance*, 18, 117–125.
- Estrada, J. (2007). Mean-Semivariance Optimization: A Heuristic Approach. *IESE Business School*. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511751691.012>

- Fabozzi, F. J., Kolm, P. N., Pachamanova, D. A., & Focardi, S. M. (2007). Robust portfolio optimization. *Journal of Portfolio Management*, 33(3). <https://doi.org/10.3905/jpm.2007.684751>
- Fama, E. F., & French, K. R. (2004). The Capital Asset Pricing Model: Theory and evidence. *Journal of Economic Perspectives*, 18(3), 25–46. <https://doi.org/10.1257/0895330042162430>
- Farrell, M. J. (1957). The Measurement of Productive Efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society*, 120(3), 253–290.
- Francis, J. C., & Kim, D. (2013). *Modern Portfolio Theory: Foundation, Analysis, and New Developments*. John Wiley & Sons, Inc.
- Galagedera, D. U. A. (2019). Modelling social responsibility in mutual fund performance appraisal: A two-stage data envelopment analysis model with non-discretionary first stage output. *European Journal of Operational Research*, 273(1), 376–389. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.08.011>
- Galagedera, D. U. A., & Silvapulle, P. (2002). Australian mutual fund performance appraisal using data envelopment analysis. *Managerial Finance*, 28(9), 60–73.
- Galagedera, D. U. A., Watson, J., Premachandra, I. M., & Chen, Y. (2016). Modeling leakage in two-stage DEA models: An application to US mutual fund families. *Omega (United Kingdom)*, 61, 62–77. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2015.07.007>
- Gardijan, M., & Kojić, V. (2012). DEA-based Investment Strategy and its Application in the Croatian Stock Market. *Croatian Operational Research Review*, 3, 203–212.
- Gardijan, M., & Škrinjarić, T. (2015). Equity portfolio optimization: A DEA based methodology applied to the Zagreb Stock Exchange. *Croatian Operational Research Review*, 6(2), 405–417. <https://doi.org/10.17535/crorr.2015.0031>
- Gökgöz, F., & Çandarlı, D. (2011). Data envelopment analysis: A comparative efficiency measurement for Turkish pension and mutual funds. *International Journal of Economic Perspectives*, 5(3), 261–281.
- Hsu, C. S., & Lin, J. R. (2007). Mutual fund performance and persistence in Taiwan: A non-parametric approach. *Service Industries Journal*, 27(5), 509–523. <https://doi.org/10.1080/02642060701411658>
- Hu, J.-L., Yu, H.-E., & Wang, Y.-T. (2012). Manager Attributes and Fund Performance: Evidence from Taiwan. *Journal of Applied Finance & Banking*, 2(4), 85–101.
- Hu, J. L., & Chang, T. P. (2008). Decomposition of mutual fund underperformance. *Applied Financial Economics Letters*, 4(5), 363–367.

<https://doi.org/10.1080/17446540701720675>

- Israelsen, C. (2005). A refinement to the Sharpe ratio and information ratio. *Journal of Asset Management*, 5(6), 423–427. <https://doi.org/10.1057/palgrave.jam.2240158>
- Jansen, D. W., & de Vries, C. G. (1991). On the Frequency of Large Stock Returns: Putting Booms and Busts into Perspective. *The Review of Economics and Statistics*, 73(1), 18. <https://doi.org/10.2307/2109682>
- Junior, P. R., Pamplona, E. , & Salomon, F. L. R. (2014). Portfolio optimization: Efficiency analysis. *RAE Revista de Administracao de Empresas*, 54(4), 405–413. <https://doi.org/10.1590/S0034-759020140406>
- Kaffash, S., Azizi, R., Huang, Y., & Zhu, J. (2020). A survey of data envelopment analysis applications in the insurance industry 1993–2018. *European Journal of Operational Research*, 284(3), 801–813. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.07.034>
- Kohl, S., Schoenfelder, J., Fügener, A., & Brunner, J. O. (2019). The use of Data Envelopment Analysis (DEA) in healthcare with a focus on hospitals. *Health Care Management Science*, 22(2), 245–286. <https://doi.org/10.1007/s10729-018-9436-8>
- Koopmans, T. C. (1951). An analysis of Production as Efficient Combination of Activities. In *Activity Analysis of Production and Allocation* (pp. 33–97). Cowles Commission for Research in Economics.
- Lintner, J. (1965). The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *The Review of Economics and Statistics*, 47(1), 13–37. <http://www.jstor.org/stable/1924119>
- Liu, J. S., Lu, L. Y. Y., Lu, W. M., & Lin, B. J. Y. (2013). A survey of DEA applications. *Omega (United Kingdom)*, 41(5), 893–902. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2012.11.004>
- Lopes, A. L. M., Carneiro, M. L., Schneider, A. B., & Lima, M. V. A. de. (2011). Markowitz Na Otimização De Carteiras Seleccionadas Por Data Envelopment Analysis – Dea. *Gestão e Sociedade*, 4(9), 640. <https://doi.org/10.21171/ges.v4i9.794>
- Lopes, A., Lanzer, E., Lima, M., & da Costa, N. (2008). DEA investment strategy in the Brazilian stock market. *Economics Bulletin*, 13(2).
- Markowitz, H. M. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91.
- Markowitz, H. M. (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. Yale University Press. <http://www.jstor.org/stable/j.ctt1bh4c8h>
- Markowitz, H., Todd, P., Xu, G., & Yamane, Y. (1993). Computation of mean-semivariance efficient sets by the Critical Line Algorithm. *Annals of Operations Research*, 45, 307–

- Meeusen, W., & Broeck, J. (1977). Efficiency Estimation from Cobb-Douglas Production Functions with Composed Error Author (s): Wim Meeusen and Julien van Den Broeck Published by : Wiley for the Economics Department of the University of Pennsylvania and Institute of Social and Economic R. *International Economic Review*, 18(2), 435–444.
- Mossin, J. (1966). Equilibrium in a Capital Asset Market. *Econometrica*, 34(4), 768–783. <http://www.jstor.org/stable/1910098>
- Murthi, B. P. S., Choi, Y. K., & Desai, P. (1997). Efficiency of mutual funds and portfolio performance measurement: A non-parametric approach. *European Journal of Operational Research*, 98(2), 408–418. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(96\)00356-6](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(96)00356-6)
- Paradi, J. C., & Zhu, H. (2013). A survey on bank branch efficiency and performance research with data envelopment analysis. *Omega (United Kingdom)*, 41(1), 61–79. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2011.08.010>
- Pareto, V. (1906). Manual of political economy. In *Manual of political economy*. Societa Editrice.
- Pendaraki, K. (2012). Mutual fund performance evaluation using data envelopment analysis with higher moments. *Journal of Applied Finance and Banking*, 2(5), 97–112. <http://search.proquest.com/openview/11a03c66d1f93a8cb49c7c9d73a311d5/1?pq-origsite=gscholar>
- Powers, J., & McMullen, P. R. (2000). Using Data Envelopment Analysis to select Efficient Large Market Cap Securities. *Journal of Business and Management*, 7(2), 31–42.
- Premachandra, I. M., Zhu, J., Watson, J., & Galagedera, D. U. A. (2012). Best-performing US mutual fund families from 1993 to 2008: Evidence from a novel two-stage DEA model for efficiency decomposition. *Journal of Banking and Finance*, 36(12), 3302–3317. <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2012.07.018>
- Roy, A. D. (1952). Safety First and the Holding of Assets. *Econometrica*, 20(3), 431–449.
- Sharpe, W. F. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk. *The Journal of Finance*, 19(3), 425–442.
- Sharpe, W. F. (1966). Mutual Fund Performance. *The Journal of Business*, 39(1), 119–138. <https://doi.org/10.1007/BF02303300>
- Sharpe, W. F. (1995). Risk, Market Sensitivity, and Diversification. *Financial Analysts Journal*, 51(1), 84–88. <https://doi.org/10.2469/faj.v51.n1.1863>

- Sortino, F. A., & Price, L. N. (1994). Performance Measurement in a Downside Risk Framework. *The Journal of Investing*, 3(3), 59–64. <https://doi.org/10.3905/joi.3.3.59>
- Tsolas, I. E. (2014). Precious metal mutual fund performance appraisal using DEA modeling. *Resources Policy*, 39(1), 54–60. <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2013.11.001>
- Zhao, X., & Wang, S. (2007). Empirical Study on Chinese Mutual Funds' Performance. *Systems Engineering - Theory & Practice*, 27(3), 1–11. [https://doi.org/10.1016/s1874-8651\(08\)60020-4](https://doi.org/10.1016/s1874-8651(08)60020-4)

Apêndice A – Resultados Intermédios

Os resultados da aplicação do modelo BCC, isto é, os *scores* de eficiência de cada ação constituinte do índice DJI, em cada trimestre de 1 de janeiro de 2018 a 31 de dezembro de 2020, exceto a empresa DOW (ver secção 1.3), são apresentados na Tabela 10. Recorde-se que a situação de eficiência corresponde a um score de 1.

Empresa		2018				2019				2020			
Ticker	Id	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT
MMM	1	0,80	0,76	0,62	0,57	0,28	0,27	0,84	0,24	0,15	0,32	0,63	0,78
AXP	2	0,69	0,82	0,95	0,88	0,76	0,82	1,00	0,87	0,76	0,55	0,46	0,59
BA	3	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,53	0,11	0,19	1,00
CAT	4	1,00	0,86	0,75	0,88	1,00	1,00	0,81	0,55	0,69	0,61	0,61	0,78
KO	5	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,29	0,64	0,82
XOM	6	0,64	0,69	0,72	0,71	0,57	0,37	0,37	0,23	0,10	0,21	0,38	
GE	7	1,00	1,00										
IBM	8	0,59	0,65	0,80	0,80	1,00	0,84	0,51	0,91	1,00	1,00	0,66	0,74
JPM	9	0,59	0,86	0,86	0,85	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,86	0,53	0,64
MCD	10	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,62	1,00	1,00	0,30	0,60	0,77
MRK	11	0,67	0,89	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	0,67	1,00	1,00	0,96	0,89
PG	12	0,93	1,00	1,00	1,00	0,79	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
RTX	13	0,66	0,76	0,83	0,87	1,00	0,72	0,31	0,30	0,61	0,32	0,42	
DIS	14	0,69	0,72	0,82	0,92	0,43	0,38	1,00	0,26	0,37	0,13	0,32	0,43
JNJ	15	0,92	0,92	0,85	0,84	0,41	0,41	1,00	0,25	0,25	0,33	0,79	0,92
WMT	16	1,00	1,00	1,00	1,00	0,67	0,56	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
HD	17	0,92	0,82	0,89	0,83	0,54	0,43	0,23	0,69	0,56	0,38	0,72	0,78
INTC	18	0,65	0,85	1,00	0,78	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,88	0,72
MSFT	19	0,83	1,00	1,00	1,00	0,67	0,74	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,98
PFE	20	0,76	0,84	0,93	1,00	1,00	0,75	0,34	0,37	0,26	0,36	0,75	
VZ	21	0,87	0,87	1,00	1,00	1,00	1,00	0,78	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
CVX	22	0,75	0,71	0,81	0,82	0,57	0,47	1,00	0,29	0,06	0,08	1,00	0,66
CSCO	23	0,66	0,79	0,88	1,00	0,89	0,79	0,42	0,85	0,59	0,40	0,74	0,75
TRV	24	0,76	0,86	0,82	0,79	0,59	0,55	0,71	0,35	0,38	0,55	0,58	0,71
UNH	25	1,00	0,95	1,00	1,00	1,00	0,72	0,74	0,54	0,86	0,57	0,74	0,85
GS	26	0,42	0,61	0,71	0,71	1,00	1,00	0,97	1,00	1,00	1,00	0,61	0,67
NKE	27	0,72	0,85	1,00	1,00	0,51	0,41	1,00	1,00	0,64	0,22	0,50	0,84
V	28	0,79	0,85	1,00	0,81	0,63	0,72	1,00	0,63	1,00	0,51	0,68	0,72
AAPL	29	0,75	0,85	1,00	1,00	0,80	0,62	1,00	0,77	1,00	1,00	1,00	1,00
DD	30	1,00	0,74	1,00	1,00	0,17	0,16						
WBA	31			0,89	0,86	0,66	0,88	0,28	1,00	0,58	0,96	0,74	0,83
AMGN	32												0,94
HON	33												0,70
CRM	34												0,77
DOW	35												
DMUs Eficientes		8	7	13	14	13	10	15	12	13	9	6	5

Tabela 10 – Scores de eficiência resultado da aplicação do modelo DEA BCC às ações constituintes do DJI nos 12 trimestres em análise.

Na Tabela 11 são apresentadas as taxas de juro sem risco calculadas de acordo com o exposto na secção 1.5.

Período	Taxa de juro sem risco
2018 T1	1,20%
2018 T2	1,64%
2018 T3	1,81%
2018 T4	2,04%
2019 T1	2,37%
2019 T2	2,45%
2019 T3	2,22%
2019 T4	1,99%
2020 T1	1,55%
2020 T2	0,37%
2020 T3	0,13%
2020 T4	0,09%

Tabela 11 – Taxas de juro sem risco para os 12 trimestres em análise.

Na Tabela 12 são apresentados os retornos esperados (*ex-ante*) das 8 carteiras de investimento, para cada um dos 12 trimestres em análise.

Período	Retorno Esperado da Carteira							
	DJI	DJIMV	DJISV0	DJISVu	DEA_{1/N}	DEAMV	DEASV0	DEASVu
2018 T1	0,94%	2,17%	2,07%	2,19%	1,31%	2,19%	2,07%	2,18%
2018 T2	0,92%	2,64%	2,62%	2,63%	0,95%	2,67%	2,67%	2,67%
2018 T3	1,06%	2,84%	2,81%	2,84%	1,46%	2,84%	2,81%	2,84%
2018 T4	1,44%	3,16%	3,13%	3,18%	1,63%	3,18%	3,14%	3,18%
2019 T1	0,96%	2,58%	2,58%	2,58%	1,16%	2,58%	2,58%	2,58%
2019 T2	1,18%	3,42%	3,42%	3,42%	1,43%	3,42%	3,42%	3,42%
2019 T3	1,28%	3,19%	3,19%	3,19%	1,55%	3,19%	3,19%	3,19%
2019 T4	1,27%	2,89%	2,90%	3,07%	1,59%	2,89%	2,90%	3,07%
2020 T1	1,29%	2,92%	3,01%	3,05%	1,48%	2,92%	3,01%	3,05%
2020 T2	0,41%	2,47%	2,46%	2,50%	0,77%	2,47%	2,46%	2,50%
2020 T3	0,95%	3,46%	3,30%	3,33%	1,71%	3,02%	3,30%	3,33%
2020 T4	1,15%	2,50%	2,86%	2,85%	1,54%	1,87%	1,93%	1,90%

Tabela 12 – Retorno Esperado das carteiras de investimento nos 12 trimestres em análise.

Na Tabela 13 é apresentada a volatilidade esperada (*ex-ante*) das 8 carteiras de investimento, mais concretamente o desvio padrão para as carteiras DJI, DJIMV, DEA_{1/N} e DEAMV e o semi-desvio padrão para as carteiras DJISV0, DJISVu, DEASV0 e DEASVu.

Período	Volatilidade da Carteira							
	DJI	DJIMV	DJISV0	DJISVu	DEA _{1/N}	DEAMV	DEASV0	DEASVu
2018 T1	2,83%	3,39%	1,43%	2,72%	2,85%	3,57%	1,43%	2,71%
2018 T2	2,82%	5,01%	2,16%	3,46%	3,03%	5,25%	2,36%	3,63%
2018 T3	2,79%	5,25%	2,33%	3,68%	2,82%	5,25%	2,33%	3,68%
2018 T4	2,62%	4,81%	1,95%	3,44%	2,57%	5,01%	1,97%	3,44%
2019 T1	2,96%	7,22%	3,78%	5,07%	3,15%	7,22%	3,78%	5,07%
2019 T2	2,93%	7,80%	3,66%	5,36%	2,81%	7,80%	3,66%	5,36%
2019 T3	3,25%	4,71%	2,14%	3,48%	3,00%	4,71%	2,14%	3,48%
2019 T4	3,27%	3,89%	2,03%	3,72%	3,19%	3,89%	2,03%	3,72%
2020 T1	3,20%	4,20%	2,09%	3,42%	2,86%	4,23%	2,09%	3,42%
2020 T2	5,31%	4,90%	2,59%	3,79%	4,11%	4,90%	2,59%	3,79%
2020 T3	5,95%	5,94%	2,66%	4,20%	4,74%	5,10%	2,66%	4,20%
2020 T4	6,44%	4,45%	2,80%	4,14%	5,30%	4,58%	2,98%	3,78%

Tabela 13 – Volatilidade das carteiras de investimento nos 12 trimestres em análise.

Na Tabela 14 são apresentados resultados os valores do rácio de Sharpe (*ex-ante*) obtidos através da resolução do modelo média-variância, assim como o retorno da carteira de investimento por unidade de risco para o índice DJI e para a carteira DEA_{1/N}.

Período	Rácio de Sharpe (<i>ex-ante</i>) da Carteira			
	DJI	DJIMV	DEA _{1/N}	DEAMV
2018 T1	-0,01%	28,61%	3,87%	27,49%
2018 T2	-0,02%	19,95%	-0,02%	19,68%
2018 T3	-0,02%	19,64%	-0,01%	19,64%
2018 T4	-0,02%	23,29%	-0,01%	22,91%
2019 T1	-0,04%	2,99%	-0,04%	2,99%
2019 T2	-0,04%	12,44%	-0,03%	12,44%
2019 T3	-0,03%	20,61%	-0,02%	20,61%
2019 T4	-0,02%	23,22%	-0,01%	23,22%
2020 T1	-0,01%	32,43%	0,00%	32,42%
2020 T2	0,81%	42,86%	9,80%	42,86%
2020 T3	13,69%	45,98%	33,23%	56,71%
2020 T4	16,39%	54,27%	27,34%	38,90%

Tabela 14 – Rácio de Sharpe das carteiras de investimento nos 12 trimestres em análise.

Na Tabela 15 são apresentados os rácios de Sortino (*ex-ante*) para as carteiras de investimento otimizadas através do modelo média-semivariância. Os rácios de Sortino foram calculados com o mesmo *target* usado na constituio da carteira.

Período	Rácio de Sortino (<i>ex-ante</i>) da Carteira			
	DJIs _{sv0}	DJIs _{svu}	DEAs _{sv0}	DEAs _{svu}
2018 T1	60,16%	36,09%	60,16%	36,08%
2018 T2	45,35%	28,73%	43,66%	28,39%
2018 T3	43,23%	28,17%	43,23%	28,17%
2018 T4	56,08%	33,16%	56,05%	33,16%
2019 T1	5,71%	4,26%	5,71%	4,26%
2019 T2	26,54%	18,09%	26,54%	18,09%
2019 T3	45,36%	27,90%	45,36%	27,90%
2019 T4	45,18%	29,03%	45,18%	29,03%
2020 T1	70,05%	43,80%	70,05%	43,80%
2020 T2	80,85%	56,20%	80,85%	56,20%
2020 T3	119,01%	76,19%	119,01%	76,19%
2020 T4	98,96%	66,61%	61,91%	47,90%

Tabela 15 – Rácios de Sortino das carteiras de investimento nos 12 trimestres em análise.

Apêndice B – Composição das Carteiras

Na Tabela 16 é apresentada a composição do Índice DJI em cada trimestre entre 1 de janeiro de 2018 e 31 de dezembro de 2020.

Índice DJI													
Empresa		2018				2019				2020			
Ticker	Id	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT
MMM	1	6,69%	6,41%	5,63%	5,57%	5,65%	5,58%	4,58%	4,32%	4,44%	4,50%	4,45%	3,78%
AXP	2	2,97%	2,85%	2,93%	2,93%	2,94%	3,04%	3,36%	3,19%	3,19%	2,86%	2,74%	2,38%
BA	3	8,79%	10,03%	10,05%	10,26%	9,97%	10,65%	9,97%	10,35%	8,45%	5,06%	5,32%	3,93%
CAT	4	4,55%	4,36%	3,93%	4,08%	3,82%	3,68%	3,63%	3,35%	3,74%	3,85%	3,62%	3,53%
KO	5	1,30%	1,27%	1,26%	1,23%	1,41%	1,27%	1,35%	1,44%	1,40%	1,46%	1,28%	1,17%
XOM	6	2,22%	2,04%	2,23%	2,12%	1,92%	2,06%	1,93%	1,78%	1,69%	1,21%	1,24%	
GE	7	0,51%	0,40%										
IBM	8	4,16%	4,29%	3,85%	3,86%	3,28%	3,70%	3,57%	3,76%	3,32%	3,61%	3,41%	2,86%
JPM	9	3,06%	3,23%	3,00%	2,99%	2,91%	2,73%	2,96%	3,10%	3,51%	2,96%	2,68%	2,27%
MCD	10	5,00%	4,67%	4,59%	4,52%	5,38%	5,20%	5,59%	5,73%	5,03%	5,50%	5,29%	5,20%
MRK	11	1,61%	1,61%	1,76%	1,90%	2,29%	2,26%	2,24%	2,23%	2,30%	2,55%	2,21%	1,96%
PG	12	2,64%	2,34%	2,26%	2,23%	2,78%	2,84%	2,95%	3,32%	3,18%	3,66%	3,43%	3,29%
RTX	13	2,34%	2,36%	2,30%	2,37%	2,03%	2,22%	2,20%	2,29%	2,39%	1,97%	1,76%	
DIS	14	3,27%	3,12%	3,17%	3,27%	3,45%	3,13%	3,85%	3,57%	3,77%	3,28%	3,24%	2,95%
JNJ	15	4,03%	3,80%	3,53%	3,71%	3,89%	3,81%	3,73%	3,44%	3,70%	4,36%	4,02%	3,52%
WMT	16	2,91%	2,69%	2,54%	2,57%	2,86%	2,70%	3,00%	3,20%	3,05%	3,81%	3,45%	3,32%
HD	17	5,52%	5,32%	5,71%	5,59%	5,20%	5,25%	5,60%	6,20%	5,56%	6,23%	7,19%	6,58%
INTC	18	1,34%	1,55%	1,45%	1,28%	1,42%	1,47%	1,29%	1,38%	1,52%	1,80%	1,71%	1,22%
MSFT	19	2,57%	2,81%	2,97%	3,17%	3,15%	3,30%	3,67%	3,77%	4,07%	5,31%	5,87%	4,99%
PFE	20	0,96%	0,97%	0,98%	1,10%	1,22%	1,08%	1,08%	0,89%	0,93%	1,02%	0,88%	
VZ	21	1,45%	1,36%	1,41%	1,38%	1,64%	1,57%	1,50%	1,58%	1,53%	1,76%	1,56%	1,40%
CVX	22	3,43%	3,22%	3,51%	3,14%	3,15%	3,23%	3,22%	3,06%	2,97%	2,35%	2,51%	1,69%
CSCO	23	1,09%	1,26%	1,24%	1,30%	1,30%	1,46%	1,46%	1,30%	1,21%	1,30%	1,33%	0,93%
TRV	24	3,94%	4,14%	3,58%	3,50%	3,62%	3,75%	4,01%	3,96%	3,48%	3,30%	3,26%	2,56%
UNH	25	6,58%	6,54%	7,34%	7,32%	7,67%	6,86%	6,64%	5,86%	7,54%	8,36%	8,49%	7,40%
GS	26	7,52%	7,61%	6,52%	6,10%	5,08%	5,27%	5,51%	5,54%	5,86%	5,15%	5,67%	4,76%
NKE	27	1,90%	2,06%	2,42%	2,36%	2,31%	2,36%	2,31%	2,55%	2,62%	2,79%	2,83%	2,98%
V	28	3,50%	3,75%	4,06%	4,22%	4,14%	4,42%	4,80%	4,70%	4,87%	5,44%	5,59%	4,75%
AAPL	29	1,27%	1,29%	1,40%	1,57%	1,23%	1,33%	1,36%	1,52%	1,90%	2,14%	2,64%	2,75%
DD	30	2,87%	2,64%	2,70%	2,44%	2,30%	2,09%						
WBA	31			1,71%	1,92%	2,02%	1,69%	1,44%	1,45%	1,47%	1,50%	1,20%	0,85%
AMGN	32												6,01%
HON	33												3,90%
CRM	34												5,98%
DOW	35							1,23%	1,19%	1,31%	0,93%	1,13%	1,08%
Ações na carteira		30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30

Tabela 16 – Composição do índice DJI durante os 12 trimestres em análise.

Na Tabela 17 é apresentada a composição da carteira DJI_{MV} em cada trimestre entre 1 de janeiro de 2018 e 31 de dezembro de 2020.

Carteira DJI _{MV}													
Empresa		2018				2019				2020			
Ticker	Id	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT
MMM	1												
AXP	2												
BA	3	26,80%	35,59%	53,20%	43,01%	100,00%	100,00%	10,74%	26,02%	1,50%			
CAT	4		13,78%		16,08%								
KO	5												
XOM	6												
GE	7												
IBM	8												
JPM	9												
MCD	10	12,36%								12,11%			
MRK	11												
PG	12										0,79%		26,40%
RTX	13												
DIS	14												
JNJ	15												
WMT	16										14,03%		8,47%
HD	17												
INTC	18												
MSFT	19	17,77%	50,63%	46,80%	40,90%			89,26%	46,18%	86,40%	85,19%	100,00%	45,59%
PFE	20												
VZ	21												
CVX	22												
CSCO	23												
TRV	24												
UNH	25	43,07%											
GS	26												
NKE	27												19,55%
V	28												
AAPL	29												
DD	30												
WBA	31												
AMGN	32												
HON	33												
CRM	34												
DOW	35												
Ações na carteira		4	3	2	3	1	1	2	3	3	3	1	4

Tabela 17 – Composição da carteira DJI_{MV} durante os 12 trimestres em análise.

Na Tabela 18 é apresentada a composição da carteira DJISV0 em cada trimestre entre 1 de janeiro de 2018 e 31 de dezembro de 2020.

Carteira DJISV0													
Empresa		2018				2019				2020			
Ticker	Id	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT
MMM	1												
AXP	2												
BA	3	13,72%	23,39%	47,56%	43,93%	100,00%	100,00%	100,00%	18,02%				
CAT	4	0,92%	19,65%										
KO	5												
XOM	6												
GE	7												
IBM	8												
JPM	9												
MCD	10	48,16%							17,96%				
MRK	11												
PG	12												
RTX	13												
DIS	14												
JNJ	15												
WMT	16									4,23%	16,32%	9,32%	18,40%
HD	17												
INTC	18												
MSFT	19		56,96%	52,44%	52,77%				64,02%	95,77%	83,68%	90,68%	81,60%
PFE	20												
VZ	21												
CVX	22												
CSCO	23												
TRV	24												
UNH	25	37,20%											
GS	26												
NKE	27												
V	28												
AAPL	29												
DD	30												
WBA	31												
AMGN	32												
HON	33												
CRM	34												
DOW	35												
Ações na carteira		4	3	2	2	1	1	1	3	2	2	2	2

Tabela 18 – Composição da carteira DJISV0 durante os 12 trimestres em análise.

Na Tabela 19 é apresentada a composição da carteira DJI_{SVU} em cada trimestre entre 1 de janeiro de 2018 e 31 de dezembro de 2020.

Carteira DJI _{SVU}													
Empresa		2018				2019				2020			
Ticker	Id	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT
MMM	1												
AXP	2												
BA	3	30,61%	27,83%	54,35%	53,05%	100,00%	100,00%		28,14%				
CAT	4		13,88%										
KO	5												
XOM	6												
GE	7												
IBM	8												
JPM	9												
MCD	10	33,07%											
MRK	11												
PG	12												
RTX	13												
DIS	14												
JNJ	15												
WMT	16									12,70%	7,26%	18,70%	
HD	17												
INTC	18												
MSFT	19	0,94%	58,29%	45,65%	46,95%			100,00%	71,96%	100,00%	87,30%	92,74%	79,30%
PFE	20												
VZ	21												
CVX	22												
CSCO	23												
TRV	24												
UNH	25	35,39%											
GS	26												
NKE	27												2,00%
V	28												
AAPL	29												
DD	30												
WBA	31												
AMGN	32												
HON	33												
CRM	34												
DOW	35												
Ações na carteira		4	3	2	2	1	1	1	2	1	2	2	3

Tabela 19 – Composição da carteira DJI_{SVU} durante os 12 trimestres em análise.

Na Tabela 20 é apresentada a composição da carteira $DEA_{1/N}$ em cada trimestre entre 1 de janeiro de 2018 e 31 de dezembro de 2020.

Carteira $DEA_{1/N}$													
Empresa		2018				2019				2020			
Ticker	Id	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT
MMM	1												
AXP	2							6,67%					
BA	3	12,50%	14,29%	7,69%	7,14%	7,69%	10,00%	6,67%	8,33%				20,00%
CAT	4	12,50%				7,69%	10,00%						
KO	5	12,50%	14,29%	7,69%	7,14%	7,69%	10,00%	6,67%	8,33%	7,69%			
XOM	6												
GE	7	12,50%	14,29%										
IBM	8					7,69%				7,69%	11,11%		
JPM	9					7,69%	10,00%	6,67%	8,33%	7,69%			
MCD	10	12,50%	14,29%	7,69%	7,14%	7,69%	10,00%		8,33%	7,69%			
MRK	11				7,14%	7,69%	10,00%	6,67%		7,69%	11,11%		
PG	12		14,29%	7,69%	7,14%		10,00%	6,67%	8,33%	7,69%	11,11%	16,67%	20,00%
RTX	13					7,69%							
DIS	14							6,67%					
JNJ	15							6,67%					
WMT	16	12,50%	14,29%	7,69%	7,14%			6,67%	8,33%	7,69%	11,11%	16,67%	20,00%
HD	17												
INTC	18			7,69%		7,69%	10,00%	6,67%	8,33%	7,69%	11,11%		
MSFT	19		14,29%	7,69%	7,14%			6,67%	8,33%	7,69%	11,11%	16,67%	
PFE	20				7,14%	7,69%							
VZ	21			7,69%	7,14%	7,69%	10,00%		8,33%	7,69%	11,11%	16,67%	20,00%
CVX	22							6,67%				16,67%	
CSCO	23				7,14%								
TRV	24												
UNH	25	12,50%		7,69%	7,14%	7,69%							
GS	26					7,69%	10,00%		8,33%	7,69%	11,11%		
NKE	27			7,69%	7,14%			6,67%	8,33%				
V	28			7,69%				6,67%		7,69%			
AAPL	29			7,69%	7,14%			6,67%		7,69%	11,11%	16,67%	20,00%
DD	30	12,50%		7,69%	7,14%								
WBA	31								8,33%				
AMGN	32												
HON	33												
CRM	34												
DOW	35												
Ações na carteira		8	7	13	14	13	10	15	12	13	9	6	5

Tabela 20 – Composição da carteira $DEA_{1/N}$ durante os 12 trimestres em análise.

Na Tabela 21 é apresentada a composição da carteira DEAMV em cada trimestre entre 1 de janeiro de 2018 e 31 de dezembro de 2020.

Carteira DEAMV													
Empresa		2018				2019				2020			
Ticker	Id	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT
MMM	1												
AXP	2												
BA	3	29,69%	43,26%	53,20%	53,87%	100,00%	100,00%	10,68%	26,02%				
CAT	4	4,10%											
KO	5												
XOM	6												
GE	7												
IBM	8												
JPM	9												
MCD	10	30,34%							27,80%	12,01%			
MRK	11												
PG	12									0,79%	10,39%	39,85%	
RTX	13												
DIS	14												
JNJ	15												
WMT	16									14,03%	9,63%	45,66%	
HD	17												
INTC	18												
MSFT	19		56,74%	46,80%	46,13%			89,32%	46,18%	87,99%	85,19%	78,70%	
PFE	20												
VZ	21										1,28%		
CVX	22												
CSCO	23												
TRV	24												
UNH	25	35,87%											
GS	26												
NKE	27												
V	28												
AAPL	29												14,49%
DD	30												
WBA	31												
AMGN	32												
HON	33												
CRM	34												
DOW	35												
Ações na carteira		4	2	2	2	1	1	2	3	2	3	4	3

Tabela 21 – Composição da carteira DEAMV durante os 12 trimestres em análise.

Na Tabela 22 é apresentada a composição da carteira DEASV0 em cada trimestre entre 1 de janeiro de 2018 e 31 de dezembro de 2020.

Carteira DEASV0													
Empresa		2018				2019				2020			
Ticker	Id	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT
MMM	1												
AXP	2												
BA	3	13,73%	37,57%	47,56%	46,66%	100,00%	100,00%		18,02%				
CAT	4	0,92%											
KO	5												
XOM	6												
GE	7												
IBM	8												
JPM	9												
MCD	10	48,16%							17,96%				
MRK	11												
PG	12												26,62%
RTX	13												
DIS	14												
JNJ	15												
WMT	16									4,23%	16,30%	9,32%	57,41%
HD	17												
INTC	18												
MSFT	19		62,43%	52,44%	53,34%			100,00%	64,02%	95,77%	83,70%	90,68%	
PFE	20												
VZ	21												
CVX	22												
CSCO	23												
TRV	24												
UNH	25	37,20%											
GS	26												
NKE	27												
V	28												
AAPL	29												15,97%
DD	30												
WBA	31												
AMGN	32												
HON	33												
CRM	34												
DOW	35												
Ações na carteira		4	2	2	2	1	1	1	3	2	2	2	3

Tabela 22 – Composição da carteira DEASV0 durante os 12 trimestres em análise.

Na Tabela 23 é apresentada a composição da carteira DEAS_{VU} em cada trimestre entre 1 de janeiro de 2018 e 31 de dezembro de 2020.

Carteira DEAS _{VU}													
Empresa		2018				2019				2020			
Ticker	Id	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT	1.ºT	2.ºT	3.ºT	4.ºT
MMM	1												
AXP	2												
BA	3	30,36%	38,42%	54,35%	53,05%	100,00%	100,00%		28,14%				
CAT	4												
KO	5												
XOM	6												
GE	7												
IBM	8												
JPM	9												
MCD	10	34,30%											
MRK	11												
PG	12												32,20%
RTX	13												
DIS	14												
JNJ	15												
WMT	16										12,70%	7,26%	53,31%
HD	17												
INTC	18												
MSFT	19		61,58%	45,65%	46,95%			100,00%	71,86%	100,00%	87,30%	92,74%	
PFE	20												
VZ	21												
CVX	22												
CSCO	23												
TRV	24												
UNH	25	35,35%											
GS	26												
NKE	27												
V	28												
AAPL	29												14,48%
DD	30												
WBA	31												
AMGN	32												
HON	33												
CRM	34												
DOW	35												
Ações na carteira		3	2	2	2	1	1	1	2	1	2	2	3

Tabela 23 – Composição da carteira DJI_{SVU} durante os 12 trimestres em análise.