

1 2 9 0



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

João Manuel Fernandes Gomes

**PREÇOS DE OPÇÕES COM CUSTOS DE
TRANSAÇÃO E VOLATILIDADE ESTOCÁSTICA**

VOLUME 1

**Dissertação no âmbito do Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças,
orientada pelo Professora Doutora Ercília Sousa e apresentada ao Departamento
de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia e à Faculdade de Economia.**

Março de 2022

Preços de opções com custos de transação e volatilidade estocástica

João Manuel Fernandes Gomes



UNIVERSIDADE D
COIMBRA

Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças

Master in Quantitative Methods in Finance

Dissertação de Mestrado | MSc Dissertation

Março 2022

Agradecimentos

Gostaria de agradecer à minha família, em especial aos meus pais por todo o apoio que me deram durante o meu percurso académico e por garantirem que nunca me faltaria nada para que pudesse concluir os meus objetivos e ao meu irmão por estar sempre disponível para me ajudar no que eu tivesse mais dificuldades, sem eles não o tinha conseguido.

À Catarina por toda a paciência e incentivo que me deu nos momentos mais difíceis.

A todos os meus amigos e colegas da faculdade, que me acompanharam neste percurso e de uma maneira ou de outra me ajudaram no que fosse preciso.

À Professora Ercília Sousa. Sempre se mostrou disponível e a sua orientação, em especial todas as sugestões e conhecimento transmitido, foram fundamentais na realização desta dissertação.

Resumo

O modelo de Black-Scholes foi um dos primeiros modelos a sugerir uma abordagem para calcular o preço teórico de opções. Num mercado sem custos de transação podemos usar o modelo de Black-Scholes para avaliar uma opção Europeia e criar uma estratégia de cobertura sobre um ativo. No entanto, no mercado real, os custos de tal estratégia tendem cada vez a ser maiores pois as sucessivas compras e vendas do ativo acumulam custos de transação. Outra limitação do modelo de Black-Scholes é a suposição de que a volatilidade é constante, algo que não se reflete nos mercados financeiros onde tende a ser aleatória. Por isso, é necessário explorar modelos que considerem custos de transação e volatilidade estocástica.

Neste trabalho abordamos o estudo de três modelos distintos: o modelo de Black-Scholes, o modelo com custos de transação e o modelo com custos de transação e volatilidade estocástica. Para a dedução das equações de derivadas parciais de cada modelo serão usados conceitos como o processo de Wiener, o lema de Itô e o teorema de Taylor.

Descrevemos ainda métodos numéricos para determinar soluções aproximadas destes modelos, mais concretamente o método- θ que é um método de diferenças finitas. Consoante o valor de θ escolhido poderemos encontrar soluções para os modelos através do método explícito, método implícito ou método de Crank-Nicolson. Por último, serão apresentados os resultados numéricos obtidos com a implementação dos métodos numéricos para os dois primeiros modelos para que possamos fazer um estudo comparativo do preço das opções.

Palavras-chave: Modelo de Black-Scholes, custos de transação, volatilidade estocástica, método de diferenças finitas

Abstract

The Black-Scholes model was one of the first models to suggest an approach to calculate the theoretical price of options. In a market with no transaction costs we can use the Black-Scholes model to evaluate an European-style option and create a hedging strategy over an asset. However, in a realistic market, the costs of such strategy tend to get bigger because buying and selling the asset successively accumulates transaction costs. Another limitation of the Black-Scholes model is the assumption that volatility is constant, something that isn't reflected in the financial markets where the volatility is random. So it's necessary to explore models that take into account transaction costs and a stochastic volatility.

In this work we discuss three models to evaluate options: the Black-Scholes, the model with transaction costs and the model with transaction costs and stochastic volatility. Concepts like the Wiener process, Itô's lemma and the Taylor theorem will be used to deduce the partial differential equations of each model.

We describe numerical methods to determine approximated solutions to these models, more precisely the θ -method which is a finite difference method. Depending on the θ value we can find solutions to the models with an explicit method, implicit method or the Crank-Nicolson method. In the end we present numerical results obtained with the implementation of the numerical methods for the first two models in order to compare the price of options given by both models.

Keywords: Black-Scholes model, transaction costs, stochastic volatility, finite difference method

Conteúdo

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
2 Modelos de opções	5
2.1 Conceitos fundamentais	5
2.2 Preço de opções	8
2.2.1 Modelo de Black-Scholes	8
2.2.2 Preço de opções com custos de transação	10
2.3 Preço de opções com custos de transação e volatilidade estocástica	13
3 Métodos numéricos	21
3.1 Método das diferenças finitas para os modelos unidimensionais	21
3.1.1 Modelo de Black-Scholes	21
3.1.2 Modelo com custos de transação	25
3.2 Método das diferenças finitas para o modelo bidimensional	28
4 Resultados numéricos	35
4.1 Modelo de Black-Scholes	35
4.2 Modelo com custos de transação	37
5 Conclusão	41
Bibliografia	43

Lista de Figuras

1.1	Índice de volatilidade VIX do CBOE	2
4.1	Teste para modelo de Black-Scholes	36
4.2	Preço de opções com modelo Black-Scholes	37
4.3	Teste para modelo com custos de transação	38
4.4	Preço de opções para modelo com custos de transação	39

Lista de Tabelas

4.1	Preços de opções para diferentes valores de σ e r	37
4.2	Preços de opções para diferentes valores de k e σ	39

Capítulo 1

Introdução

Nos mercados financeiros, a existência de derivativos financeiros como as opções, permite aos investidores usar estes instrumentos financeiros como coberturas contra flutuações de preço de um determinado ativo, variando o seu valor com o preço do ativo subjacente. Por isso é importante procurar e estudar modelos que avaliem corretamente as opções.

Uma opção é um instrumento financeiro no qual o seu detentor poderá comprar ou vender um ativo subjacente por um preço pré-determinado chamado preço de exercício aquando da celebração do contrato, denotado por preço de exercício. Numa opção Call, o detentor paga inicialmente um prémio e tem o direito, não a obrigação, de comprar o ativo subjacente pelo preço de exercício, enquanto que o emissor deverá vender o ativo se o detentor assim o desejar. Numa opção Put, o detentor paga na mesma um prémio mas garante o direito de vender o ativo subjacente ao emissor pelo preço de exercício.

Outro fator importante nas opções é a maturidade, ou seja, o tempo que o detentor tem para exercer a opção. Existem vários tipos de opções, das quais se destacam duas: as opções europeias que só podem ser exercidas na maturidade e as opções americanas que podem ser exercidas em qualquer momento até à maturidade.

Um dos principais modelos para determinar o valor do preço de opções é o modelo de Black-Scholes [2]. Este modelo é usado para determinar o preço de opções europeias tendo em conta o preço do ativo subjacente que segue um movimento geométrico Browniano e vai depender da volatilidade do ativo e da taxa de juro sem risco. A equação de Black-Scholes é uma equação de derivadas parciais, dada por

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

onde σ representa a volatilidade, r é a taxa de juro sem risco, S é o preço do ativo subjacente e $V(S, t)$ o valor da opção. No entanto, o modelo de Black-Scholes não considera ativos que paguem dividendos nem os custos de transação e é deduzido para a volatilidade constante.

Num mercado sem custos de transação é possível usar o modelo de Black-Scholes para criar uma posição de cobertura constituída por uma posição longa na ação e uma posição curta na opção, cujo valor não depende da ação mas apenas do tempo e do valor das constantes conhecidas. No entanto, no mercado real, os custos de tal estratégia tendem cada vez a ser maiores pois as sucessivas compras e

vendas do ativo acumulam custos de transação. Na verdade, a melhor estratégia de cobertura com base no modelo de Black-Scholes seria comprar o ativo e mantê-lo durante toda a maturidade da opção, como mostrado por Soner [15]. Deste modo, é necessário explorar um modelo de Black-Scholes com custos de transação que possa potencialmente oferecer uma melhor estratégia de cobertura. Um dos primeiros a sugerir este modelo foi Leland [11] (mais tarde continuado por [3, 18]) onde considera que o portfólio é reequilibrado em tempo discreto, com intervalo Δt , e os custos de transação são proporcionais ao valor do ativo subjacente. Assim, os custos de transação são dados por $kS|\Delta\alpha|$, onde k representa um parâmetro de custo, S o valor do ativo e $|\Delta\alpha|$ a quantidade de ativos transacionados. A equação de derivadas parciais referente a este modelo é a seguinte,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV - k\sigma S^2 \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \sqrt{\frac{2}{\pi\Delta t}} = 0$$

onde o último termo corresponde aos custos de transação. Outras aproximações a este modelo [4, 9] consideram que o método de reequilibrar constantemente o portfólio não é prático e preferem adotar outro tipo de estratégias otimizadas.

O modelo original de Black-Scholes mostra outra limitação ao supôr que a volatilidade é constante onde, como já referimos, o ativo subjacente é modelado através de um movimento geométrico Browniano que depende dessa volatilidade. No entanto, como no mercado real a volatilidade tende a ser aleatória, parece ser mais adequado considerar modelos com volatilidade estocástica. Alguns dos primeiros a sugerir tais modelos foram Hull e White [10] onde a volatilidade é definida como um processo de Hull-White e Heston [8] que introduz um modelo que não é baseado na fórmula de Black-Scholes. Um fator importante no modelo que vamos apresentar é a necessidade de considerar um instrumento financeiro que represente a volatilidade e que seja transacionado como um ativo. Um exemplo é o índice de volatilidade VIX que representa a expectativa de volatilidade do mercado com base no índice S&P 500.

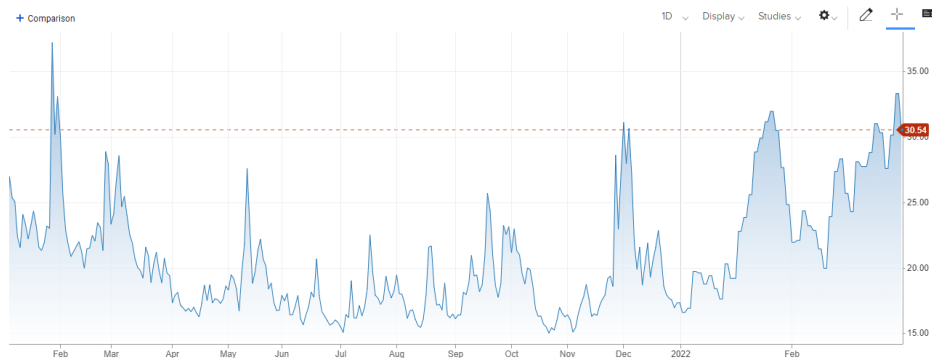


Fig. 1.1 Índice de volatilidade VIX do CBOE

A equação do modelo com custos de transação e volatilidade estocástica que iremos ver é

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\varphi^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + S\varphi\sigma^2\rho \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + r\sigma \frac{\partial V}{\partial \sigma} - rV \\
& -kS\sqrt{\frac{2}{\pi\Delta t}} \sqrt{\sigma^2 S^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)^2 + 2\rho\varphi S\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma} + \varphi^2 \sigma^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma}\right)^2} \\
& -k_1\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi\Delta t}} \sqrt{\sigma^2 S^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma\partial S}\right)^2 + 2\rho\varphi S\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + \varphi^2 \sigma^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2}\right)^2}
\end{aligned}$$

onde os dois últimos termos correspondem aos custos de transação do ativo e aos custos de transação do índice de volatilidade, respetivamente.

Neste trabalho apresentamos a dedução dos três modelos distintos para avaliar opções europeias: o modelo de Black-Scholes clássico [2], o modelo com custos de transação e o modelo com custos de transação e volatilidade estocástica [6, 16].

Para determinar as soluções destes modelos vamos desenvolver métodos numéricos, mais concretamente, métodos de diferenças finitas unidimensionais para os dois primeiros modelos e um método de diferenças finitas bidimensional para o modelo com custos de transação e volatilidade estocástica.

Por último apresentaremos os resultados numéricos para os dois primeiros modelos, o que permitirá fazer um estudo comparativo do preço das opções determinadas por estes modelos.

Capítulo 2

Modelos de opções

Neste capítulo iremos abordar três modelos diferentes para determinar o preço de opções europeias. Começaremos por mostrar definições e teoremas, como o processo de Wiener, o teorema de Taylor e o lema de Itô, para chegar à equação do modelo de Black-Scholes [2].

Em seguida descrevemos como surgem os modelos com custos de transação e com volatilidade estocástica [6, 16].

2.1 Conceitos fundamentais

Começamos por definir um processo de Wiener. Este processo surgiu inicialmente como um modelo matemático para descrever o movimento Browniano, movimento este que já tinha sido usado para prever o preço de ações.

Para o compreendermos, começamos por definir um processo estocástico. A definição seguinte encontra-se em [14].

Definição 2.1 *Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias X_t , que são definidas para um conjunto de parâmetros t , com t a variar continuamente num intervalo de tempo $0 \leq t \leq T$.*

Um processo estocástico é geralmente denotado como $\{X_t, t \in [0, T]\}$ ou $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$. A seguir definimos um processo de Wiener [5].

Definição 2.2 *Um processo de Wiener W_t (ou movimento Browniano) é um processo em tempo contínuo para $t \geq 0$ com as seguintes propriedades:*

- $W_0 = 0$, q.c.
- $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$, para $\forall t \geq s \geq 0$
- É um processo de acréscimos independentes, isto é, $\forall t_1, t_2, \dots, t_n, 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ são independentes.

Particularmente, para $t \geq 0$,

$$E(W_t) = 0, \quad E(W_t^2) = t.$$

De seguida introduzimos a definição de equação diferencial estocástica [5].

Definição 2.3 (i) Denotamos por $\mathbb{L}^2(0, T)$ o espaço de todos os processos estocásticos progressivamente mensuráveis G tal que

$$E\left(\int_0^T G^2 dt\right) < \infty.$$

(ii) Da mesma maneira, $\mathbb{L}^1(0, T)$ é o espaço de todos os processos progressivamente mensuráveis F tal que

$$E\left(\int_0^T |F| dt\right) < \infty.$$

Definição 2.4 Suponhamos que X é um processo estocástico que satisfaz

$$X(r) = X(s) + \int_s^r F dt + \int_s^r G dW,$$

para algum $F \in \mathbb{L}^1(0, T)$, $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$, tal que $0 \leq s \leq r \leq T$. Dizemos que a equação diferencial estocástica de X é

$$dX = F dt + G dW,$$

para todo o $0 \leq t \leq T$.

O lema de Itô é uma fórmula usada para diferenciar uma função dependente do tempo de um processo estocástico. É usado durante o processo de encontrar a equação do modelo de Black-Scholes.

Teorema 2.1 Suponhamos que a equação diferencial estocástica de X é

$$dX = F dt + G dW,$$

para $F \in \mathbb{L}^1(0, T)$, $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$.

Assumimos $u : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínuo e que $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ existem e são contínuos.

$$Y(t) := u(X(t), t).$$

Então a equação diferencial estocástica de Y é

$$\begin{aligned} dY &= \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} G^2 dt \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} F + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} G^2 \right) dt + \frac{\partial u}{\partial x} G dW. \end{aligned}$$

De seguida apresentamos o lema de Itô geral.

Teorema 2.2 Suponhamos

$$dX^i = F^i dt + G^i dW,$$

com $F^i \in \mathbb{L}^1(0, T)$, $G^i \in \mathbb{L}^2(0, T)$ para $i = 1, \dots, n$.

Se $u : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínuo, com derivadas parciais contínuas u_t , u_{x_i} , $u_{x_i x_j}$ para $i, j = 1, \dots, n$

então

$$d(u(X^1, \dots, X^n, t)) = u_t dt + \sum_{i=1}^n u_{x_i} dX^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j} G^i G^j dt,$$

tal que $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ e $u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$.

Usaremos ainda o teorema de Taylor nas deduções dos modelos das secções que se seguem.

Seja f uma função de classe C^n , ou seja, com derivadas contínuas de ordem n num intervalo $[a, b]$, o teorema de Taylor permite-nos obter uma aproximação para $f(x)$. De seguida apresentamos o teorema de Taylor [1].

Teorema 2.3 *Seja $x \in [p_1, p_2] \subseteq \mathbb{R}$ e $f : [p_1, p_2] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função, a fórmula de Taylor num ponto $c \in [p_1, p_2]$ é*

$$f(x) = P(x) + R(x),$$

onde $P(x)$ é o polinómio de Taylor de ordem $n - 1$, dado por

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(c)}{i!} (x - c)^i,$$

e $R(x)$ representa o resto e é dado por

$$R(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_c^x f^{(n)}(t) (x-t)^{n-1} dt,$$

desde que $f^{(n-1)}$ seja absolutamente contínua para $n \in \mathbb{N}$.

Para funções com duas variáveis, necessitamos de um teorema de Taylor bivariado. Para isso, começamos por mostrar o teorema do valor médio bivariado. Os teoremas enunciados encontram-se em [7].

Teorema 2.4 *Seja D um subconjunto de \mathbb{R}^2 convexo, e seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Dados quaisquer pontos distintos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) em D , existe $(c, d) \in D$ num segmento entre (x_0, y_0) e (x_1, y_1) , com $(c, d) \neq (x_i, y_i)$, $i = 0, 1$, tal que*

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) &= (x_1 - x_0)F_x(c, d) + (y_1 - y_0)f_y(c, d) \\ &= (x_1 - x_0, y_1 - y_0)\nabla f(c, d). \end{aligned}$$

Corolário 2.1 *Seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$ um subconjunto de \mathbb{R}^2 aberto, convexo e não vazio, com $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Então f é uma função constante em D se e só se f é diferenciável em D .*

Por último, temos o teorema de Taylor bivariado.

Teorema 2.5 *Seja D um subconjunto de \mathbb{R}^2 convexo e aberto, e n um inteiro não negativo. Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que as derivadas parciais de f de ordem $\leq n + 1$ existem e são contínuas em D , então*

para quaisquer pontos distintos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) em D , existe $(c, d) \in D$ num segmento entre x_0, y_0 e x_1, y_1 , com $(c, d) \neq (x_i, y_i)$, $i = 0, 1$, tal que

$$f(x_1, y_1) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^i f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(c, d),$$

onde $h := x_1 - x_0$ e $k := y_1 - y_0$. Alternadamente,

$$f(x_1, y_1) = P_n(x_1, y_1) + \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^l \partial y^m}(c, d) \frac{(x-x_0)^l}{l!} \frac{(y-y_0)^m}{m!}, l+m = n+1,$$

onde

$$P_n(x, y) := \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} \frac{\partial^{l+m} f}{\partial x^l \partial y^m}(x_0, y_0) \frac{(x-x_0)^l}{l!} \frac{(y-y_0)^m}{m!}, l+m \leq n,$$

para $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2.2 Preço de opções

Nesta secção começamos por descrever o modelo de Black-Scholes clássico e depois apresentamos um modelo com custos de transação.

2.2.1 Modelo de Black-Scholes

O modelo de Black-Scholes surgiu no início da década de 70 como uma forma de determinar o preço de opções europeias tendo em conta o preço do ativo subjacente [2]. No entanto, este modelo não inclui o pagamento de dividendos por parte do ativo nem os custos de transação e é deduzido para a volatilidade constante.

Nesta secção iremos mostrar como podemos chegar ao modelo de Black-Scholes definido por uma equação de derivadas parciais. Começamos por considerar que o ativo subjacente segue um movimento geométrico Browniano,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (2.1)$$

onde S_t representa o preço do ativo ao longo do tempo, μ é a taxa de retorno esperada, σ é a volatilidade e W_t é um processo de Wiener.

Consideramos uma carteira $\Pi = V - \alpha S$ com $V(S, t)$ a representar o valor da opção e α a quantidade de unidades do ativo.

Assim, temos

$$d\Pi = dV - \alpha dS.$$

Podemos usar o lema de Itô na função $V(S, t)$ onde S verifica (2.1). Temos que

$$dV_t = \left(\frac{\partial V}{\partial S} a + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} b dW_t,$$

com $a = \mu S_t$ e $b = \sigma S_t$. Assim,

$$dV_t = \left(\mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S} dW_t, \quad (2.2)$$

Logo, de (2.1) e (2.2) temos

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV - \alpha dS \\ &= \left(\mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S} dW_t - \alpha \mu S_t dt - \alpha \sigma S_t dW_t, \end{aligned}$$

Juntanto os termos em dt e dW ,

$$\begin{aligned} d\Pi &= \left(\mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \alpha \mu S_t \right) dt + \left(\sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S} - \alpha \sigma S_t \right) dW_t \\ &= \left(\sigma S_t \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \alpha \right) \right) dW_t + \left(\mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \alpha \mu S_t \right) dt. \end{aligned} \quad (2.3)$$

De maneira a removermos a aleatoriedade no portfólio eliminamos o termo dW_t , o que nos leva a uma estratégia de *delta hedging*, ou seja, o valor da carteira mantém-se inalterado apesar das alterações que possam ocorrer no preço do ativo. Assim,

$$\alpha = \frac{\partial V}{\partial S}.$$

Substituindo α em (2.3), obtemos

$$\begin{aligned} d\Pi &= \left(\mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \frac{\partial V}{\partial S} \mu S_t \right) dt + \left(\sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S} - \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S_t \right) dW_t \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Como o portfólio não contém incerteza, então passa a não ter risco e portanto a sua taxa de retorno deve ser igual à taxa de retorno de um ativo sem risco.

Considerando o princípio de não arbitragem, temos

$$E(d\Pi) = r\Pi dt,$$

onde r representa uma taxa de juro sem risco. Dada a carteira inicialmente considerada, vamos ter

$$\begin{aligned} E(d\Pi) &= r(V - \alpha S) dt \\ &= r \left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) dt. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Por (2.4) temos

$$E(d\Pi) = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt,$$

e igualando a (2.5), passamos tudo para o mesmo membro e obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt - r \left(V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) dt &= 0 \\ \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \right) dt &= 0. \end{aligned}$$

Isto permite-nos obter a equação de derivadas parciais de Black-Scholes, dada por

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

2.2.2 Preço de opções com custos de transação

Apesar do modelo de Black-Scholes ser eficiente num mercado sem custos de transação, a verdade é que no mercado real estes custos existem e ao adoptar a estratégia deste modelo, tendem cada vez a ser maiores pelas sucessivas compras e vendas do ativo.

Assim, é necessário ter um modelo que incorpore os custos de transação [6, 16].

Para isso vamos novamente considerar, tal como no modelo de Black-Scholes, que o ativo subjacente segue um movimento geométrico Browniano, ou seja, verifica a equação diferencial estocástica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (2.6)$$

Como só queremos adicionar os custos de transação à equação de Black-Scholes devemos considerar a mesma carteira, ou seja, $\Pi = V - \alpha S$.

O que nos permite obter

$$d\Pi = dV - \alpha dS.$$

Novamente pelo lema de Itô, temos

$$dV_t = \left(\frac{\partial V}{\partial S} a + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} b dW_t.$$

Com $a = \mu S_t$ e $b = \sigma S_t$, chegamos à seguinte equação,

$$dV_t = \left(\mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S} dW_t. \quad (2.7)$$

Assim, de (2.6) e (2.7) chegamos à mesma equação de (2.3), dada por

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV - \alpha dS \\ &= \left(\sigma S_t \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \alpha \right) \right) dW_t + \left(\mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \alpha \mu S_t \right) dt. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Vamos agora juntar o termo dos custos de transação. Leland [11] considera que o portefólio é reequilibrado em tempo discreto, com intervalo Δt , e que os custos de transação são proporcionais ao valor do ativo subjacente. Por isso consideremos primeiro (2.6), (2.7) e (2.8) em tempo discreto,

$$\begin{aligned}\Delta S &= \mu S \Delta t + \sigma S \Delta W, \\ \Delta V &= \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \Delta t + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \Delta W, \\ \Delta \Pi &= \left(\sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \alpha \right) \right) \Delta W + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \alpha \mu S \right) \Delta t.\end{aligned}$$

Seja a taxa de custo de transação proporcional ao volume de transação vS . Então a transação de v ativos custa $kS|\Delta\alpha|$ com um parâmetro de custo k .

Subtraindo os custos de transação da carteira, ficamos com

$$\Delta \Pi = \left(\sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \alpha \right) \right) \Delta W + \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} - \alpha \mu S \right) \Delta t - kS|\Delta\alpha|.$$

Podemos determinar α eliminando a variável aleatória ΔW , tal como fizemos no modelo anterior. Assim,

$$\alpha = \frac{\partial V}{\partial S}.$$

Para determinar $\Delta\alpha$, que é a variação de $\frac{\partial V}{\partial S}$ quando S e t variam ΔS e Δt , respetivamente, recorremos ao teorema de Taylor,

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S + \Delta S, t + \Delta t) = \frac{\partial V}{\partial S}(S, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) \Delta S + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial S}(S, t) \Delta t + R(S, t).$$

Como $\Delta\alpha = \frac{\partial V}{\partial S}(S + \Delta S, t + \Delta t) - \frac{\partial V}{\partial S}(S, t)$ então

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \mu S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \Delta t + \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \Delta W + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial S} \Delta t + R(S, t) \\ &= \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \Delta W + \left(\mu S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial S} \right) \Delta t + R(S, t).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Agora aproximamos ΔW por $E(|\Delta W|)$. Em tempo discreto

$$\Delta W = W_{t+\Delta t} - W_t \sim N(0, \Delta t).$$

A função densidade de ΔW é

$$f_{\Delta W}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sqrt{\Delta t}}} \exp\left(\frac{-w^2}{2\Delta t}\right).$$

O valor esperado de $|\Delta W|$ é então

$$\begin{aligned}E(|\Delta W|) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |w| f_{\Delta W}(w) dw \\ &= \int_0^{+\infty} w f_{\Delta W}(w) dw + \int_{-\infty}^0 -w f_{\Delta W}(w) dw \\ &= \int_0^{+\infty} w \frac{1}{\sqrt{2\pi\sqrt{\Delta t}}} \exp\left(\frac{-w^2}{2\Delta t}\right) dw + \int_{-\infty}^0 -w \frac{1}{\sqrt{2\pi\sqrt{\Delta t}}} \exp\left(\frac{-w^2}{2\Delta t}\right) dw.\end{aligned}$$

Depois de substituída a função densidade, trocamos o integral e obtemos

$$\begin{aligned}
E(|\Delta W|) &= -\int_0^{+\infty} -w \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\Delta t}} \exp\left(\frac{-w^2}{2\Delta t}\right) dw - \int_0^{+\infty} -w \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\Delta t}} \exp\left(\frac{-w^2}{2\Delta t}\right) dw \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\Delta t} \int_0^{+\infty} -\frac{w}{\Delta t} \exp\left(\frac{-w^2}{2\Delta t}\right) dw - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\Delta t} \int_0^{+\infty} -\frac{w}{\Delta t} \exp\left(\frac{-w^2}{2\Delta t}\right) dw \\
&= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\Delta t} \int_0^{+\infty} -\frac{w}{\Delta t} \exp\left(\frac{-w^2}{2\Delta t}\right) dw \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\Delta t} \left[\exp\left(\frac{-w^2}{2\Delta t}\right) \right]_0^{+\infty} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\Delta t}.
\end{aligned}$$

Tendo em conta que $E(|\Delta W|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\Delta t}$ podemos aproximar (2.9), tal que

$$\begin{aligned}
\Delta \alpha &= \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\Delta t} + \left(\mu S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial S} \right) \Delta t + R(S, t) \\
&= \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\Delta t} + o(\sqrt{\Delta t}) \\
&\approx \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\Delta t},
\end{aligned}$$

pois $\sqrt{\Delta t} > \Delta t$ para valores inferiores a 1. Assim, o custo de transação esperado é

$$E(kS|\Delta \alpha|) \approx k\sigma S^2 \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\Delta t}.$$

Atualizando α e os custos de transação, obtemos o valor esperado da variação do portefólio, dado por

$$\begin{aligned}
E(\Delta \Pi) &= \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) \Delta t - k\sigma S^2 \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\Delta t} \\
&= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \Delta t - k\sigma S^2 \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} \Delta t \\
&= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - k\sigma S^2 \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} \right) \Delta t. \tag{2.10}
\end{aligned}$$

Como ΔW desapareceu então o portefólio passou a não ter risco. Assim, a taxa de retorno deste deve ser igual à taxa de retorno de um ativo sem risco, caso contrário haveria oportunidades de arbitragem.

Seguindo o princípio de não arbitragem, e sendo r a taxa de juro sem risco, o retorno esperado do portefólio será

$$\begin{aligned}
E(\Delta\Pi) &= r\Pi\Delta t \\
&= r(V - \alpha S)\Delta t \\
&= r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S}S\right)\Delta t.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

De (2.10) e (2.11) vem que

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - k\sigma S^2 \left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right| \sqrt{\frac{2}{\pi\Delta t}}\right)\Delta t - r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S}S\right)\Delta t = 0.$$

Simplificando a equação anterior, temos

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV - k\sigma S^2 \left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right| \sqrt{\frac{2}{\pi\Delta t}}\right)\Delta t = 0.$$

Isto permite obter a equação de derivadas parciais para o preço com custos de transação, dada por

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV - k\sigma S^2 \left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right| \sqrt{\frac{2}{\pi\Delta t}} = 0.$$

Podemos facilmente notar que sem os custos de transação, a equação acima é equivalente à equação do modelo de Black-Scholes.

2.3 Preço de opções com custos de transação e volatilidade estocástica

O preço do ativo verifica,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_{t,1}, \tag{2.12}$$

onde σ_t representa a volatilidade estocástica e $W_{t,1}$ denota um processo de Wiener.

A volatilidade, que definimos como um processo de Hull-White modificado [10, 17], verifica a equação diferencial estocástica

$$d\sigma_t = \varepsilon \sigma_t dt + \varphi \sigma_t dW_{t,2}, \tag{2.13}$$

onde $W_{t,2}$ denota um processo de Wiener, com $W_{t,1}$ e $W_{t,2}$ correlacionados tal que $E(dW_{t,1}dW_{t,2}) = \rho dt$. Temos ainda μ a depender de S e t . No entanto, ε e φ não dependem de S mas apenas de σ e t . De acordo com Hull e White, a volatilidade deverá na verdade seguir um processo estocástico mais complexo do que o definido em (2.13).

Para conseguirmos aplicar os resultados nesta secção devemos ter algo que represente a volatilidade e que seja transacionado da mesma maneira que um ativo. Para isso, podemos usar o índice de volatilidade VIX transacionado pela CBOE e que representa a expectativa de volatilidade do mercado com base no índice S&P 500.

Começemos por definir a carteira $\Pi = V - \alpha S - \beta \sigma$ onde $V(S, \sigma, t)$ representa o valor da opção, α a quantidade de unidades do ativo e β a quantidade de unidades do índice de volatilidade. Daqui

obtemos

$$d\Pi = dV - \alpha dS - \beta d\sigma.$$

Pelo lema de Itô geral para $V(S, \sigma, t)$, obtemos

$$\begin{aligned} dV_t &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \varphi^2 \sigma^2 dt + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} S \varphi \sigma^2 \rho dt \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \varphi^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + S \varphi \sigma^2 \rho \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial \sigma} d\sigma. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Por (2.12), (2.13) e (2.14), a carteira fica

$$\begin{aligned} d\Pi &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \varphi^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + S \varphi \sigma^2 \rho \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial \sigma} d\sigma - \alpha dS \\ &\quad - \beta d\sigma = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \varphi^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + S \varphi \sigma^2 \rho \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} \right) dt + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \alpha \right) dS \\ &\quad + \left(\frac{\partial V}{\partial \sigma} - \beta \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Depois de juntarmos os termos dS e $d\sigma$, substituímos por (2.12) e (2.13) e obtemos

$$\begin{aligned} d\Pi &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \alpha \right) + \lambda \sigma \left(\frac{\partial V}{\partial \sigma} - \beta \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \varphi^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \right. \\ &\quad \left. + S \varphi \sigma^2 \rho \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} \right) dt + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \alpha \right) \sigma S dW_{t,1} + \left(\frac{\partial V}{\partial \sigma} - \beta \right) \varphi \sigma dW_{t,2}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Sejam os custos de transação de v ativos S igual a $kS|\Delta\alpha|$ e de v_1 unidades do índice de volatilidade σ igual a $k_1\sigma|\Delta\beta|$ num intervalo de tempo Δt .

Para determinar α e β eliminamos as variáveis aleatórias $dW_{t,1}$ e $dW_{t,2}$, fazendo

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \alpha \right) \sigma S &= 0 \\ \left(\frac{\partial V}{\partial \sigma} - \beta \right) \varphi \sigma &= 0. \end{aligned}$$

Isto permite-nos obter $\alpha = \frac{\partial V}{\partial S}$ e $\beta = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$.

Para determinar $|\Delta\alpha|$ e $|\Delta\beta|$, começamos por ver o caso discreto de (2.12), (2.13), (2.14) e (2.15).

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta W_1,$$

$$\Delta \sigma = \lambda \sigma \Delta t + \varphi \sigma \Delta W_2,$$

$$\Delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \varphi^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + S \varphi \sigma^2 \rho \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} \right) \Delta t + \frac{\partial V}{\partial S} \Delta S + \frac{\partial V}{\partial \sigma} \Delta \sigma,$$

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \alpha \right) + \lambda \sigma \left(\frac{\partial V}{\partial \sigma} - \beta \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \varphi^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + S \varphi \sigma^2 \rho \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} \right) \Delta t \\ &\quad + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \alpha \right) \sigma S \Delta W_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial \sigma} - \beta \right) \varphi \sigma \Delta W_2. \end{aligned}$$

Subtraindo os custos de transação do ativo e do índice de volatilidade, a carteira fica

$$\begin{aligned} \Delta\Pi = & \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \alpha \right) + \lambda \sigma \left(\frac{\partial V}{\partial \sigma} - \beta \right) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \varphi^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \right. \\ & \left. + S \varphi \sigma^2 \rho \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} \right) \Delta t + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \alpha \right) \sigma S \Delta W_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial \sigma} - \beta \right) \varphi \sigma \Delta W_2 - k S |\Delta \alpha| - k_1 \sigma |\Delta \beta|. \end{aligned}$$

Podemos agora determinar $\Delta\alpha$, recorrendo ao teorema de Taylor.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial S}(S + \Delta S, \sigma + \Delta \sigma, t + \Delta t) = & \frac{\partial V}{\partial S}(S, \sigma, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, \sigma, t) \Delta S + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma}(S, \sigma, t) \Delta \sigma \\ & + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t}(S, \sigma, t) \Delta t + R(S, \sigma, t). \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \Delta \alpha = & \frac{\partial V}{\partial S}(S + \Delta S, \sigma + \Delta \sigma, t + \Delta t) - \frac{\partial V}{\partial S}(S, \sigma, t) \\ = & \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, \sigma, t) \Delta S + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma}(S, \sigma, t) \Delta \sigma + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t}(S, \sigma, t) \Delta t + R(S, \sigma, t). \end{aligned}$$

Substituindo os termos ΔS e $\Delta \sigma$

$$\begin{aligned} \Delta \alpha = & (\mu S \Delta t + \sigma S \Delta W_1) \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (\lambda \sigma \Delta t + \varphi \sigma \Delta W_2) \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t} \Delta t + R(S, \sigma, t) \\ = & \left(\mu S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \lambda \sigma \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t} \right) \Delta t + \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \Delta W_1 + \varphi \sigma \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} \Delta W_2 + R(S, \sigma, t) \\ = & \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \Delta W_1 + \varphi \sigma \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} \Delta W_2 + o(\sqrt{\Delta t}). \end{aligned}$$

Pelo que

$$\Delta \alpha \approx \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \Delta W_1 + \varphi \sigma \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} \Delta W_2.$$

Anteriormente já tínhamos visto que

$$\begin{aligned} \Delta W = & W_{t+\Delta t} - W_t \sim N(0, \Delta t) \\ = & W_{t+\Delta t} - W_t \sim N(0, 1) \sqrt{\Delta t}. \end{aligned}$$

Assim podemos definir as variáveis

$$\begin{aligned} \Delta W_1 = & w_1 \sqrt{\Delta t} \\ \Delta W_2 = & \rho w_1 \sqrt{\Delta t} + \sqrt{1 - \rho^2} w_2 \sqrt{\Delta t}, \end{aligned}$$

onde w_1 e w_2 são variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas tal que $w_1, w_2 \sim N(0, 1)$.

Logo vem

$$\begin{aligned} \Delta \alpha \approx & \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} w_1 \sqrt{\Delta t} + \varphi \sigma \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} (\rho w_1 \sqrt{\Delta t} + \sqrt{1 - \rho^2} w_2 \sqrt{\Delta t}) \\ \approx & a_1 w_1 + a_2 w_2, \end{aligned}$$

com

$$a_1 = \sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sqrt{\Delta t} + \rho \varphi \sigma \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} \sqrt{\Delta t},$$

$$a_2 = \sqrt{1 - \rho^2} \varphi \sigma \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} \sqrt{\Delta t}.$$

Vamos determinar $E(|\Delta\alpha|)$. Começemos por determinar $E(\Delta\alpha)$ e $V(\Delta\alpha)$.

$$E(\Delta\alpha) = a_1 E(w_1) + a_2 E(w_2) = 0$$

$$V(\Delta\alpha) = V(a_1 w_1) + V(a_2 w_2) = a_1^2 + a_2^2.$$

Assim, temos a função densidade de $\Delta\alpha$

$$f_{\Delta\alpha}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \exp\left(\frac{-w^2}{2(a_1^2 + a_2^2)}\right).$$

O valor esperado de $|\Delta\alpha|$ é dado por

$$\begin{aligned} E(|\Delta\alpha|) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |w| f_{\Delta\alpha}(w) dw \\ &= \int_0^{+\infty} w f_{\Delta\alpha}(w) dw + \int_{-\infty}^0 -w f_{\Delta\alpha}(w) dw \\ &= - \int_0^{+\infty} -w f_{\Delta\alpha}(w) dw - \int_0^{+\infty} -w f_{\Delta\alpha}(w) dw \\ &= -2 \int_0^{+\infty} -w \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \exp\left(\frac{-w^2}{2(a_1^2 + a_2^2)}\right) dw. \end{aligned}$$

Resolvendo o integral, obtemos

$$\begin{aligned} E(|\Delta\alpha|) &= -2 \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{-w}{a_1^2 + a_2^2} \exp\left(\frac{-w^2}{2(a_1^2 + a_2^2)}\right) dw \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \left[\exp\left(\frac{-w^2}{2(a_1^2 + a_2^2)}\right) \right]_0^{+\infty} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{a_1^2 + a_2^2}. \end{aligned}$$

Logo, o valor esperado dos custos de transação do ativo é

$$E(kS|\Delta\alpha|) = kS \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

De modo análogo, vamos determinar $\Delta\beta$. Começamos por recorrer ao teorema de Taylor

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \sigma}(S + \Delta S, \sigma + \Delta\sigma, t + \Delta t) &= \frac{\partial V}{\partial \sigma}(S, \sigma, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial S}(S, \sigma, t) \Delta S + \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2}(S, \sigma, t) \Delta\sigma + \\ &\quad + \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial t}(S, \sigma, t) \Delta t + R(S, \sigma, t). \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned}\Delta\beta &= \frac{\partial V}{\partial\sigma}(S+\Delta S, \sigma+\Delta\sigma, t+\Delta t) - \frac{\partial V}{\partial\sigma}(S, \sigma, t) \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial\sigma\partial S}(S, \sigma, t)\Delta S + \frac{\partial^2 V}{\partial\sigma^2}(S, \sigma, t)\Delta\sigma + \frac{\partial^2 V}{\partial\sigma\partial t}(S, \sigma, t)\Delta t + R(S, \sigma, t).\end{aligned}$$

Substituindo ΔS e $\Delta\sigma$

$$\begin{aligned}\Delta\beta &= \frac{\partial^2 V}{\partial\sigma\partial S}(\mu S\Delta t + \sigma S\Delta W_1) + \frac{\partial^2 V}{\partial\sigma^2}(\lambda\sigma\Delta t + \varphi\sigma\Delta W_2) + \frac{\partial^2 V}{\partial\sigma\partial t}\Delta t + R(S, \sigma, t) \\ &= \left(\mu S\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma\partial S} + \lambda\sigma\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial\sigma\partial t}\right)\Delta t + \sigma S\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma\partial S}\Delta W_1 + \varphi\sigma\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma^2}\Delta W_2 + R(S, \sigma, t) \\ &= \sigma S\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma\partial S}\Delta W_1 + \varphi\sigma\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma^2}\Delta W_2 + o(\sqrt{\Delta t}).\end{aligned}$$

Aproximando, temos

$$\Delta\beta \approx \sigma S\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma\partial S}\Delta W_1 + \varphi\sigma\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma^2}\Delta W_2.$$

Fazendo de forma semelhante ao que fizemos anteriormente, vem

$$\begin{aligned}\Delta\beta &\approx \sigma S\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma\partial S}w_1\sqrt{\Delta t} + \varphi\sigma\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma^2}(\rho w_1\sqrt{\Delta t} + \sqrt{1-\rho^2}w_2\sqrt{\Delta t}) \\ &\approx b_1w_1 + b_2w_2,\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}b_1 &= \sigma S\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma\partial S}\sqrt{\Delta t} + \rho\varphi\sigma\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma^2}\sqrt{\Delta t}, \\ b_2 &= \sqrt{1-\rho^2}\varphi\sigma\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma^2}\sqrt{\Delta t}.\end{aligned}$$

De seguida determinamos $E(|\Delta\beta|)$. Analogamente a $|\Delta\alpha|$, sabemos que

$$E(|\Delta\beta|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

Portanto, o valor esperado dos custos de transação do índice de volatilidade é dado por

$$E(k_1\sigma|\Delta\beta|) = k_1\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

Atualizando α , β e os custos de transação, obtemos o valor esperado da variação do portefólio

$$\begin{aligned}E(\Delta\Pi) &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\varphi^2\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial\sigma^2} + S\varphi\sigma^2\rho\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma}\right)\Delta t - kS\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ &\quad - k_1\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}.\end{aligned}$$

Substituindo a_1 , a_2 , b_1 e b_2 ficamos com

$$\begin{aligned}
 E(\Delta\Pi) &= \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\varphi^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + S\varphi\sigma^2\rho \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma} \right] \Delta t \\
 &\quad - kS\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\left(\sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sqrt{\Delta t} + \rho\varphi\sigma \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma} \sqrt{\Delta t} \right)^2 + \left(\sqrt{1-\rho^2}\varphi\sigma \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma} \sqrt{\Delta t} \right)^2} \\
 &\quad - k_1\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\left(\sigma S \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma\partial S} \sqrt{\Delta t} + \rho\varphi\sigma \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \sqrt{\Delta t} \right)^2 + \left(\sqrt{1-\rho^2}\varphi\sigma \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \sqrt{\Delta t} \right)^2}.
 \end{aligned}$$

Ao desenvolver os cálculos dentro das raízes dos custos de transação obtemos

$$\begin{aligned}
 E(\Delta\Pi) &= \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\varphi^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + S\varphi\sigma^2\rho \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma} \right] \Delta t \\
 &\quad - kS\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\sigma^2 S^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)^2 \Delta t + 2\rho\varphi S\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma} \Delta t + \varphi^2 \sigma^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma} \right)^2 \Delta t} \\
 &\quad - k_1\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\sigma^2 S^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma\partial S} \right)^2 \Delta t + 2\rho\varphi S\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \Delta t + \varphi^2 \sigma^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \right)^2 \Delta t}.
 \end{aligned}$$

Assim podemos pôr todos os membros a multiplicar por Δt

$$\begin{aligned}
 E(\Delta\Pi) &= \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\varphi^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + S\varphi\sigma^2\rho \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma} \right. \\
 &\quad \left. - kS\sqrt{\frac{2}{\pi\Delta t}} \sqrt{\sigma^2 S^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)^2 + 2\rho\varphi S\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma} + \varphi^2 \sigma^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma} \right)^2} \right. \\
 &\quad \left. - k_1\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi\Delta t}} \sqrt{\sigma^2 S^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma\partial S} \right)^2 + 2\rho\varphi S\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + \varphi^2 \sigma^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \right)^2} \right] \Delta t. \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

Como ΔW_1 e ΔW_2 desapareceram, então o portfólio já não contém incerteza e portanto o retorno esperado deve ser igual a uma taxa de juro sem risco, tal que

$$E(\Delta\Pi) = r\Pi\Delta t.$$

Fazemos a substituição pela carteira definida, ou seja, $\Pi = V - \alpha S - \beta \sigma$

$$\begin{aligned}
 E(\Delta\Pi) &= r(V - \alpha S - \beta \sigma)\Delta t \\
 &= \left(rV - rS\frac{\partial V}{\partial S} - r\sigma\frac{\partial V}{\partial \sigma} \right) \Delta t. \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

De (2.16) e (2.17) obtemos a equação diferencial

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\varphi^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + S\varphi\sigma^2\rho \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + r\sigma \frac{\partial V}{\partial \sigma} - rV \\
& - kS\sqrt{\frac{2}{\pi\Delta t}} \sqrt{\sigma^2 S^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)^2 + 2\rho\varphi S\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma} + \varphi^2 \sigma^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma}\right)^2} \\
& - k_1\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi\Delta t}} \sqrt{\sigma^2 S^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma\partial S}\right)^2 + 2\rho\varphi S\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + \varphi^2 \sigma^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Os últimos dois termos correspondem aos custos de transação do ativo e do índice de volatilidade, respetivamente. Sem esses termos e as derivadas parciais σ , ficamos com a equação do modelo de Black-Scholes.

Capítulo 3

Métodos numéricos

Neste capítulo vamos começar por apresentar o método numérico para obter soluções aproximadas dos modelos apresentados no capítulo anterior. O método usado será o método das diferenças finitas. Numa primeira parte iremos desenvolver o método numérico para os modelos unidimensionais, ou seja, o modelo de Black-Scholes com e sem custos de transação. No final o método será desenvolvido para o modelo com custos de transação e volatilidade estocástica.

3.1 Método das diferenças finitas para os modelos unidimensionais

O método das diferenças finitas consiste em substituir as derivadas parciais da equação por aproximações obtidas com o teorema de Taylor. Precisamos para isso de definir um domínio discreto para obter aproximações nesse domínio.

Para obter as soluções aproximadas das três equações de derivadas parciais escolheu-se o método da média ponderada, ou método- θ [13]. Este método para $\theta = 0$ dá-nos o método explícito, $\theta = \frac{1}{2}$ o método de Crank-Nicolson e $\theta = 1$ o método implícito.

3.1.1 Modelo de Black-Scholes

Vamos usar o método- θ para aproximar a equação de Black-Scholes definida em $t \geq 0$ e $S > 0$, ou seja, queremos resolver a equação

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

sujeita a uma condição terminal $V(S, T) = \Psi(S)$ onde T é o tempo de maturidade.

Começamos por fazer a seguinte mudança de variáveis,

$$S = e^x, \quad t = T - \tau, \quad V(S, t) = u(x, \tau),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}x &= \ln S, & \frac{\partial x}{\partial S} &= \frac{1}{S}, & \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} &= -\frac{1}{S^2}, \\ \tau &= T - t, & \frac{\partial \tau}{\partial t} &= -1,\end{aligned}$$

Temos então que

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial S} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial S} \right)^2 = -\frac{1}{S^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial \tau}.\end{aligned}$$

Substituindo as derivadas na equação de Black-Scholes, obtemos

$$-\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 e^{2x} \left(-\frac{1}{e^{2x}} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{e^{2x}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + r e^x \frac{1}{e^x} \frac{\partial u}{\partial x} - ru = 0.$$

Podemos simplificar esta equação obtendo

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \sigma^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) - r \frac{\partial u}{\partial x} + ru = 0. \quad (3.1)$$

A condição terminal com a mudança de variável $\tau = T - t$ passa a ser uma condição inicial, ou seja, temos agora $u(x, 0) = \Psi(x)$.

Vamos então descrever o método numérico para determinar a solução numérica de (3.1). Começamos para isso a descrever o domínio discreto. Temos agora que $0 < \tau < T$ e $-\infty < x < +\infty$. Para implementarmos numericamente esta equação necessitamos de limitar o domínio $-\infty < x < \infty$ por $x_{\min} < x < x_{\max}$.

Seja $x_i = x_0 + ih$ com $i = 0, 1, \dots, M$ onde h é o passo espacial tal que $x_0 = x_{\min}$ e $x_M = x_{\max}$ e $\tau_n = n\Delta t$, $n = 0, 1, \dots, N$ onde Δt é o passo temporal e $n \in \mathbb{N}_0$. Denotamos ainda u_i^n as aproximações da solução exata $u(x_i, \tau_n)$.

$$\begin{aligned}u_\tau(x_i, \tau_n) &\approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}, \\ u_x(x_i, \tau_n) &\approx \theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} + (1 - \theta) \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h}, \\ u_{xx}(x_i, \tau_n) &\approx \theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} + (1 - \theta) \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}.\end{aligned} \quad (3.2)$$

Ao substituirmos estas derivadas em (3.1) obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \frac{1}{2}\sigma^2 \left(\theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} + (1-\theta) \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \right. \\
&\quad \left. - \theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} - (1-\theta) \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} \right) - r\theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} + (1-\theta) \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} + ru_i^n \\
&= u_i^{n+1} - u_i^n - \frac{1}{2}\Delta t \sigma^2 \left(\theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} + (1-\theta) \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \right. \\
&\quad \left. - \theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} - (1-\theta) \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} \right) - r\Delta t \theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} - r\Delta t (1-\theta) \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} \\
&\quad + r\Delta t u_i^n.
\end{aligned}$$

Podemos reescrever esta equação na forma

$$\begin{aligned}
u_i^{n+1} - \frac{1}{2}\Delta t \sigma^2 \theta \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} - \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} \right) - r\Delta t \theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} &= u_i^n \\
+ \frac{1}{2}\Delta t \sigma^2 (1-\theta) \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} - \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} \right) + r\Delta t (1-\theta) \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} &- r\Delta t u_i^n.
\end{aligned}$$

De modo a simplificar a equação, isolamos os pontos, o que nos dá

$$\begin{aligned}
u_{i-1}^{n+1} \left(\frac{\Delta t}{2h} \theta \left(-\frac{\sigma^2}{h} - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{r}{h} \right) \right) + u_i^{n+1} \left(1 + \frac{\Delta t}{h^2} \sigma^2 \theta \right) + u_{i+1}^{n+1} \left(\frac{\Delta t}{2h} \theta \left(-\frac{\sigma^2}{h} + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{r}{h} \right) \right) \\
= u_{i-1}^n \left(\frac{\Delta t}{2h} (1-\theta) \left(\frac{\sigma^2}{h} + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{r}{h} \right) \right) + u_i^n \left(1 - r\Delta t - \frac{\Delta t}{h^2} \sigma^2 (1-\theta) \right) \\
+ u_{i+1}^n \left(\frac{\Delta t}{2h} (1-\theta) \left(\frac{\sigma^2}{h} - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{r}{h} \right) \right).
\end{aligned}$$

Seja $\lambda = \frac{\Delta t}{2h}$. Definimos,

- $a = \lambda \left(\frac{\sigma^2}{h} + \frac{\sigma^2}{2} - r \right),$
- $b = -2\lambda \frac{\sigma^2}{h},$
- $c = \lambda \left(\frac{\sigma^2}{h} - \frac{\sigma^2}{2} + r \right).$

o que nos leva à equação

$$u_{i-1}^{n+1}(-\theta a) + u_i^{n+1}(1 - \theta b) + u_{i+1}^{n+1}(-\theta c) = u_{i-1}^n((1 - \theta)a) + u_i^n(1 - r\Delta t + (1 - \theta)b) + u_{i+1}^n((1 - \theta)c).$$

Para resolver esta equação, vamos reescrevê-la na sua forma matricial, ou seja

$$\mathbf{A}U^{n+1} + \mathbf{v}_1 = \mathbf{B}U^n + \mathbf{v}_2$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - \theta b & -\theta c & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\theta a & 1 - \theta b & -\theta c & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & -\theta a & 1 - \theta b & -\theta c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & -\theta a & 1 - \theta b & -\theta c \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\theta a & 1 - \theta b \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 - r\Delta t + (1 - \theta)b & (1 - \theta)c & 0 & \dots & \dots & 0 \\ (1 - \theta)a & 1 - r\Delta t + (1 - \theta)b & (1 - \theta)c & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & (1 - \theta)a & 1 - r\Delta t + (1 - \theta)b & (1 - \theta)c & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & (1 - \theta)a & 1 - r\Delta t + (1 - \theta)b & (1 - \theta)c \end{bmatrix}$$

Os vetores \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e U^n vão ser

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -\theta a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\theta c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} (1 - \theta)a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (1 - \theta)c \end{bmatrix}, \quad U^n = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{M-2}^n \\ u_{M-1}^n \end{bmatrix}$$

Assim, as aproximações nos pontos discretos do domínio vão ser obtidas através da seguinte equação

$$U^{n+1} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}U^n + \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$$

Falta-nos apenas definir as condições iniciais e de fronteira para cada opção.

Para a condição inicial temos, para uma opção call Europeia

$$u(x, 0) = \max(e^x - K, 0),$$

e para uma opção put Europeia

$$u(x, 0) = \max(K - e^x, 0),$$

onde K é o preço de exercício da opção.

Como condições de fronteira temos, para uma opção call

$$u(x_{\min}, \tau) = 0, \quad u(x_{\max}, \tau) = e^{x_{\max}} - K \exp(-r\tau),$$

e para uma opção put

$$u(x_{\min}, \tau) = K \exp(-r\tau) - e^{x_{\min}}, \quad u(x_{\max}, \tau) = 0.$$

3.1.2 Modelo com custos de transação

Vamos agora usar o método- θ para aproximar a equação com custos de transação, definida para $t \geq 0$ e $S > 0$. A equação a resolver é dada por,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV - k\sigma S^2 \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} = 0,$$

sujeita a uma condição terminal $V(S, T) = \Psi(S)$ onde T é o tempo de maturidade.

Usamos a mesma mudança de variáveis usada na equação de Black-Scholes e assim obtemos

$$-\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{2x} \left(-\frac{1}{e^{2x}} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{e^{2x}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + r e^{2x} \frac{1}{e^{2x}} \frac{\partial u}{\partial x} - ru - k\sigma e^{2x} \left| \frac{1}{e^{2x}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right| \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} = 0.$$

Como $\frac{1}{e^{2x}} > 0$, podemos simplificar a equação anterior

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) - r \frac{\partial u}{\partial x} + ru + k\sigma \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right| \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} = 0, \quad (3.3)$$

com o último termo a representar os custos de transação, depois de feita a mudança de variável.

Novamente, a condição terminal com a mudança de variável $\tau = T - t$ passa a ser uma condição inicial, ou seja, temos $u(x, 0) = \Psi(x)$.

Vamos então descrever o método numérico para determinar a solução numérica de (3.3). O domínio discreto será $0 < \tau < T$ e $-\infty < x < +\infty$. Para implementarmos numericamente esta equação necessitamos de limitar o domínio $-\infty < x < \infty$ por $x_{\min} < x < x_{\max}$.

Seja $x_i = x_0 + ih$ com $i = 0, 1, \dots, M$ onde h é o passo espacial tal que $x_0 = x_{\min}$, $x_M = x_{\max}$ e $\tau_n = n\Delta t$, $n = 0, 1, \dots, N$ onde Δt é o passo temporal e $n \in \mathbb{N}_0$. Denotamos u_i^n as aproximações da solução exata $u(x_i, \tau_n)$.

Vamos ver como aproximar $|u_{xx} - u_x|$. Com base em [12], vamos fazer a seguinte aproximação

$$|u_{xx} - u_x| \approx \theta \operatorname{sgn}(u_{xx}^n - u_x^n)(u_{xx}^{n+1} - u_x^{n+1}) + (1 - \theta) \operatorname{sgn}(u_{xx}^n - u_x^n)(u_{xx}^n - u_x^n),$$

onde

$$u_x^n := \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h},$$

$$u_{xx}^n := \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}.$$

Substituímos as aproximações em (3.3) e obtemos

$$0 = u_i^{n+1} - u_i^n - \frac{1}{2}\Delta t \sigma^2 \left(\theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} + (1 - \theta) \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} - (1-\theta) \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} - r\Delta t \theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} - r\Delta t (1-\theta) \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} \\
& + r\Delta t u_i^n + \Delta t k \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} \left(\theta \operatorname{sgn}(u_{xx}^n - u_x^n) \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} - \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} \right) \right. \\
& \left. + (1-\theta) \operatorname{sgn}(u_{xx}^n - u_x^n) \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} - \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} \right) \right).
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
0 &= u_i^{n+1} - u_i^n - \frac{1}{2} \Delta t \sigma^2 \left(\theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} + (1-\theta) \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \right. \\
& - \theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} - (1-\theta) \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} - r\Delta t \theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} - r\Delta t (1-\theta) \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} \\
& + r\Delta t u_i^n + \Delta t k \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} \operatorname{sgn}(u_{xx}^n - u_x^n) \left(\theta \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} - \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} \right) \right. \\
& \left. + (1-\theta) \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} - \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} \right) \right).
\end{aligned}$$

Como a cada instante do tempo conhecemos a solução U^n mas não conhecemos a solução U^{n+1} , vamos definir a seguinte variável

$$s^n = k \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} \operatorname{sgn}(u_{xx}^n - u_x^n),$$

que será atualizada a cada passo do tempo.

Isto permite-nos obter a seguinte equação

$$\begin{aligned}
& u_i^{n+1} + \left(\Delta t s^n - \frac{1}{2} \Delta t \sigma^2 \right) \theta \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} - \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} \right) - r\Delta t \theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} \\
& = u_i^n + \left(-\Delta t s^n + \frac{1}{2} \Delta t \sigma^2 \right) (1-\theta) \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} - \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} \right) \\
& + r\Delta t (1-\theta) \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} - r\Delta t u_i^n.
\end{aligned}$$

Podemos reescrever esta equação na forma

$$\begin{aligned}
& u_{i-1}^{n+1} + \left(\frac{\Delta t}{h} \theta \left(-\frac{\sigma^2}{2h} - \frac{\sigma^2}{4} + \frac{r}{2} + \frac{s^n}{h} + \frac{s^n}{2} \right) \right) + u_i^{n+1} \left(1 - \frac{2\Delta t}{h^2} \theta s^n + \frac{\Delta t}{h^2} \sigma^2 \theta \right) \\
& + u_{i+1}^{n+1} \left(\frac{\Delta t}{h} \theta \left(-\frac{\sigma^2}{2h} + \frac{\sigma^2}{4} - \frac{r}{2} + \frac{s^n}{h} - \frac{s^n}{2} \right) \right) = u_{i-1}^n \left(\frac{\Delta t}{h} (1-\theta) \left(\frac{\sigma^2}{2h} + \frac{\sigma^2}{4} - \frac{r}{2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{s^n}{h} - \frac{s^n}{2} \right) \right) + u_i^n \left(1 - r\Delta t + \frac{2\Delta t}{h^2} (1-\theta) s^n - \frac{\Delta t}{h^2} \sigma^2 (1-\theta) \right) \\
& + u_{i+1}^n \left(\frac{\Delta t}{h} (1-\theta) \left(\frac{\sigma^2}{2h} - \frac{\sigma^2}{4} + \frac{r}{2} - \frac{s^n}{h} + \frac{s^n}{2} \right) \right).
\end{aligned}$$

Seja $\lambda = \frac{\Delta t}{h}$. Se definirmos

$$\begin{aligned}
a &= \lambda \left(\frac{\sigma^2}{2h} + \frac{\sigma^2}{4} - \frac{r}{2} \right), & a_s^n &= s^n \lambda \left(-\frac{1}{h} - \frac{1}{2} \right), \\
b &= -\lambda \frac{\sigma^2}{h}, & b_s^n &= s^n \lambda \frac{2}{h}, \\
c &= \lambda \left(\frac{\sigma^2}{2h} - \frac{\sigma^2}{4} + \frac{r}{2} \right), & c_s^n &= s^n \lambda \left(-\frac{1}{h} + \frac{1}{2} \right),
\end{aligned}$$

a nossa equação fica da forma

$$\begin{aligned}
&u_{i-1}^{n+1}(-\theta(a+a_s^n)) + u_i^{n+1}(1-\theta(b+b_s^n)) + u_{i+1}^{n+1}(-\theta(c+c_s^n)) \\
&= u_{i-1}^n((1-\theta)(a+a_s^n)) + u_i^n(1-r\Delta t + (1-\theta)(b+b_s^n)) + u_{i+1}^n((1-\theta)(c+c_s^n)).
\end{aligned}$$

Assim, já a podemos reescrever na sua forma matricial, ou seja

$$\mathbf{A}U^{n+1} + \mathbf{v}_1 = \mathbf{B}U^n + \mathbf{v}_2$$

com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
1 - \theta(b + b_s^n) & -\theta(c + c_s^n) & 0 & \dots & \dots & 0 \\
-\theta(a + a_s^n) & 1 - \theta(b + b_s^n) & -\theta(c + c_s^n) & 0 & \dots & \vdots \\
0 & -\theta(a + a_s^n) & 1 - \theta(b + b_s^n) & -\theta(c + c_s^n) & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \dots & 0 & -\theta(a + a_s^n) & 1 - \theta(b + b_s^n) & -\theta(c + c_s^n) \\
0 & \dots & \dots & 0 & -\theta(a + a_s^n) & 1 - \theta(b + b_s^n)
\end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}
1 - r\Delta t + (1 - \theta)(b + b_s^n) & (1 - \theta)(c + c_s^n) & \dots & 0 \\
(1 - \theta)(a + a_s^n) & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & (1 - \theta)(c + c_s^n) \\
0 & \dots & (1 - \theta)(a + a_s^n) & 1 - r\Delta t + (1 - \theta)(b + b_s^n)
\end{bmatrix}$$

Os vetores \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e U^n vão ser

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -\theta(a + a_s^n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\theta(c + c_s^n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} (1 - \theta)(a + a_s^n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (1 - \theta)(c + c_s^n) \end{bmatrix}, \quad U^n = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{M-2}^n \\ u_{M-1}^n \end{bmatrix}$$

Os valores a_s^n , b_s^n e c_s^n devem ser atualizados a cada instante de tempo.

Por fim as aproximações nos pontos discretos do domínio vão ser obtidas através da seguinte equação

$$U^{n+1} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}U^n + \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$$

Falta-nos apenas definir as condições iniciais e de fronteira para cada opção que vão ser as mesmas do modelo de Black-Scholes, ou seja, para a condição inicial temos, para uma opção call Europeia

$$u(x, 0) = \max(e^x - K, 0),$$

e para uma opção put Europeia

$$u(x, 0) = \max(K - e^x, 0),$$

onde K é o preço de exercício da opção.

Como condições de fronteira temos, para uma opção call

$$u(x_{\min}, \tau) = 0, \quad u(x_{\max}, \tau) = e^{x_{\max}} - K \exp(-r\tau),$$

e para uma opção put

$$u(x_{\min}, \tau) = K \exp(-r\tau) - e^{x_{\min}}, \quad u(x_{\max}, \tau) = 0.$$

3.2 Método das diferenças finitas para o modelo bidimensional

Por último, vamos usar o método- θ para aproximar a equação com custos de transação e volatilidade estocástica, definida para $t \geq 0$, $S \geq 0$ e $\sigma \geq 0$. A equação a resolver é dada por

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\phi^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + S\phi\sigma^2\rho \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + r\sigma \frac{\partial V}{\partial \sigma} - rV \\ & - kS \sqrt{\frac{2}{\pi\Delta t}} \sqrt{\sigma^2 S^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)^2 + 2\rho\phi S\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma} + \phi^2 \sigma^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma}\right)^2} \\ & - k_1 \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi\Delta t}} \sqrt{\sigma^2 S^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial S}\right)^2 + 2\rho\phi S\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S\partial\sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + \phi^2 \sigma^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2}\right)^2}, \end{aligned}$$

sujeita a uma condição terminal $V(S, \sigma, T) = \Psi(S, \sigma)$, onde T é o tempo de maturidade.

Começamos por fazer a seguinte mudança de variáveis,

$$S = e^x, \quad \sigma = e^y, \quad t = T - \tau, \quad V(S, \sigma, t) = u(x, y, \tau),$$

e portanto,

$$\begin{aligned}x &= \ln S, & \frac{\partial x}{\partial S} &= \frac{1}{S}, & \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} &= -\frac{1}{S^2}, \\y &= \ln \sigma, & \frac{\partial y}{\partial \sigma} &= \frac{1}{\sigma}, & \frac{\partial^2 y}{\partial \sigma^2} &= -\frac{1}{\sigma^2}, \\ \tau &= T - t, & \frac{\partial \tau}{\partial t} &= -1,\end{aligned}$$

Temos então que

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial V}{\partial S} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial S} \right)^2 = -\frac{1}{S^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial V}{\partial \sigma} &= \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} &= \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma} \right)^2 = -\frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma \partial S} &= \frac{\partial x}{\partial S} \frac{\partial y}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{S} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

Substituindo as derivadas na equação, obtemos

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2} e^{2y} e^{2x} \frac{1}{e^{2x}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \varphi^2 e^{2y} \frac{1}{e^{2y}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + e^x \varphi e^{2y} \rho \frac{1}{e^x} \frac{1}{e^y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ &+ r e^x \frac{1}{e^x} \frac{\partial u}{\partial x} + r e^y \frac{1}{e^y} \frac{\partial u}{\partial y} - r u - k e^x \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} \\ &\sqrt{e^{2y} e^{2x} \left(\frac{1}{e^{2x}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right)^2 + 2 \rho \varphi e^x e^{2y} \frac{1}{e^{2x}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{1}{e^x} \frac{1}{e^y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \varphi^2 e^{2y} \left(\frac{1}{e^x} \frac{1}{e^y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2} \\ &- k_1 e^y \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} \\ &\sqrt{e^{2y} e^{2x} \left(\frac{1}{e^x} \frac{1}{e^y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2 \rho \varphi e^x e^{2y} \frac{1}{e^x} \frac{1}{e^y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{1}{e^{2y}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \varphi^2 e^{2y} \left(\frac{1}{e^{2y}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right)^2}.\end{aligned}$$

Podemos simplificar a equação anterior e obtemos

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{2} e^{2y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \varphi^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \varphi e^y \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - r \frac{\partial u}{\partial x} - r \frac{\partial u}{\partial y} + r u \\ &+ k \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} \sqrt{e^{2y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \rho \varphi e^y \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \varphi^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2} \\ &+ k_1 \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} \sqrt{e^{2y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2 \rho \varphi e^y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \varphi^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2},\end{aligned} \tag{3.4}$$

com os últimos dois termos a representarem os custos de transação do ativo e do índice de volatilidade, respetivamente, depois da mudança das variáveis.

Com a mudança de variável $\tau = T - t$ a condição terminal passa a ser uma condição inicial, ou seja, temos $u(x, y, 0) = \Psi(x, y)$.

Vamos agora descrever o método numérico para determinar a solução numérica de (3.4). Para isso começamos a descrever o domínio discreto. Temos que $0 < \tau < T$, $-\infty < x < +\infty$ e $-\infty < y < +\infty$. Precisamos então de limitar o domínio de $-\infty < x < +\infty$ e $-\infty < y < +\infty$ para $x_{\min} < x < x_{\max}$ e $y_{\min} < y < y_{\max}$ de maneira a implementar numericamente a equação.

Seja $x_i = x_0 + ih$ para $i = 0, 1, \dots, M$ tal que $x_0 = x_{\min}$ e $x_M = x_{\max}$, $y_j = y_0 + jl$ para $j = 0, 1, \dots, J$ tal que $y_0 = y_{\min}$ e $y_J = y_{\max}$ onde h e l são os passos espaciais e $\tau_n = n\Delta t$, $n = 0, 1, \dots, N$ onde Δt é o passo temporal e $n \in \mathbb{N}_0$. Definimos ainda $u_{i,j}^n$ as aproximações da solução exata $u(x_i, y_j, \tau_n)$.

$$\begin{aligned} u_\tau(x_i, y_j, \tau_n) &\approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t}, \\ u_x(x_i, y_j, \tau_n) &\approx \theta \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{2h} + (1-\theta) \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h}, \\ u_y(x_i, y_j, \tau_n) &\approx \theta \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{2l} + (1-\theta) \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2l}, \\ u_{xx}(x_i, y_j, \tau_n) &\approx \theta \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h^2} + (1-\theta) \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h^2}, \\ u_{yy}(x_i, y_j, \tau_n) &\approx \theta \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{l^2} + (1-\theta) \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{l^2}, \\ u_{xy}(x_i, y_j, \tau_n) &\approx \theta \left(\frac{u_{i+1,j+1}^{n+1} - u_{i-1,j+1}^{n+1}}{4hl} + \frac{u_{i-1,j-1}^{n+1} - u_{i+1,j-1}^{n+1}}{4hl} \right) \\ &\quad + (1-\theta) \left(\frac{u_{i+1,j+1}^n - u_{i-1,j+1}^n}{4hl} + \frac{u_{i-1,j-1}^n - u_{i+1,j-1}^n}{4hl} \right). \end{aligned}$$

Começamos por aproximar os dois últimos termos de (3.4), fazendo um processo semelhante a [12]. Para $\rho = 1$,

$$\begin{aligned} &\sqrt{e^{2y}(u_{xx} - u_x)^2 + 2\rho\phi e^y(u_{xx} - u_x)u_{xy} + \phi^2(u_{xy})^2} \approx |e^y(u_{xx} - u_x) + \phi u_{xy}| \\ &\approx \theta \operatorname{sgn}(e^y(u_{xx}^n - u_x^n) + \phi u_{xy}^n)(e^y(u_{xx}^{n+1} - u_x^{n+1}) + \phi u_{xy}^{n+1}) \\ &\quad + (1-\theta) \operatorname{sgn}(e^y(u_{xx}^n - u_x^n) + \phi u_{xy}^n)(e^y(u_{xx}^n - u_x^n) + \phi u_{xy}^n), \\ &\sqrt{e^{2y}(u_{xy})^2 + 2\rho\phi e^y u_{xy}(u_{yy} - u_y) + \phi^2(u_{yy} - u_y)^2} \approx |e^y u_{xy} + \phi(u_{yy} - u_y)| \\ &\approx \theta \operatorname{sgn}(e^y u_{xy}^n + \phi(u_{yy}^n - u_y^n))(e^y u_{xy}^{n+1} + \phi(u_{yy}^{n+1} - u_y^{n+1})) \\ &\quad + (1-\theta) \operatorname{sgn}(e^y u_{xy}^n + \phi(u_{yy}^n - u_y^n))(e^y u_{xy}^n + \phi(u_{yy}^n - u_y^n)). \end{aligned}$$

Para $\rho = -1$, temos

$$\begin{aligned} & \sqrt{e^{2y}(u_{xx} - u_x)^2 + 2\rho\phi e^y(u_{xx} - u_x)u_{xy} + \phi^2(u_{xy})^2} \approx |e^y(u_{xx} - u_x) - \phi u_{xy}| \\ & \approx \theta \operatorname{sgn}(e^y(u_{xx}^n - u_x^n) - \phi u_{xy}^n)(e^y(u_{xx}^{n+1} - u_x^{n+1}) - \phi u_{xy}^{n+1}) \\ & + (1 - \theta) \operatorname{sgn}(e^y(u_{xx}^n - u_x^n) - \phi u_{xy}^n)(e^y(u_{xx}^n - u_x^n) - \phi u_{xy}^n), \\ & \sqrt{e^{2y}(u_{xy})^2 + 2\rho\phi e^y u_{xy}(u_{yy} - u_y) + \phi^2(u_{yy} - u_y)^2} \approx |e^y u_{xy} - \phi(u_{yy} - u_y)| \\ & \approx \theta \operatorname{sgn}(e^y u_{xy}^n - \phi(u_{yy}^n - u_y^n))(e^y u_{xy}^{n+1} - \phi(u_{yy}^{n+1} - u_y^{n+1})) \\ & + (1 - \theta) \operatorname{sgn}(e^y u_{xy}^n - \phi(u_{yy}^n - u_y^n))(e^y u_{xy}^n - \phi(u_{yy}^n - u_y^n)), \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} u_x^n & := \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h}, \\ u_{xx}^n & := \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h^2}, \\ u_y^n & := \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2l}, \\ u_{yy}^n & := \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{l^2}, \\ u_{xy}^n & := \frac{u_{i+1,j+1}^n - u_{i-1,j+1}^n + u_{i-1,j-1}^n - u_{i+1,j-1}^n}{4hl}, \end{aligned}$$

Aproximando as derivadas de (3.4) desta forma, para $\rho = 1$, ficamos com

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} e^{2y} \left(\theta \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h^2} + (1 - \theta) \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h^2} \right. \\ & - \theta \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{2h} - (1 - \theta) \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h} \left. \right) - \frac{1}{2} \phi^2 \left(\theta \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{l^2} \right. \\ & + (1 - \theta) \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{l^2} - \theta \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{2l} - (1 - \theta) \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2l} \left. \right) \\ & - \phi e^y \rho \left(\theta \left(\frac{u_{i+1,j+1}^{n+1} - u_{i-1,j+1}^{n+1}}{4hl} + \frac{u_{i-1,j-1}^{n+1} - u_{i+1,j-1}^{n+1}}{4hl} \right) + (1 - \theta) \left(\frac{u_{i+1,j+1}^n - u_{i-1,j+1}^n}{4hl} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{u_{i-1,j-1}^n - u_{i+1,j-1}^n}{4hl} \right) \right) - r \left(\theta \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{2h} + (1 - \theta) \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h} \right) - r \left(\theta \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{2l} \right. \\ & \left. + (1 - \theta) \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2l} \right) + r u_{i,j}^n + k \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} (\theta \operatorname{sgn}(e^y(u_{xx}^n - u_x^n) + \phi u_{xy}^n)(e^y(u_{xx}^{n+1} - u_x^{n+1}) + \phi u_{xy}^{n+1}) \\ & + (1 - \theta) \operatorname{sgn}(e^y(u_{xx}^n - u_x^n) + \phi u_{xy}^n)(e^y(u_{xx}^n - u_x^n) + \phi u_{xy}^n)) + k_1 \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} (\theta \operatorname{sgn}(e^y u_{xy}^n + \phi(u_{yy}^n - u_y^n)) \\ & \times (e^y u_{xy}^{n+1} + \phi(u_{yy}^{n+1} - u_y^{n+1})) + (1 - \theta) \operatorname{sgn}(e^y u_{xy}^n + \phi(u_{yy}^n - u_y^n))(e^y u_{xy}^n + \phi(u_{yy}^n - u_y^n))). \end{aligned}$$

Podemos reorganizar a equação anterior da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
& u_{i,j}^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} e^{2y} \theta \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h^2} - \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{2h} \right) - \frac{\Delta t}{2} \varphi^2 \theta \left(\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{l^2} \right. \\
& \left. - \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{2l} \right) - \Delta t \varphi e^y \rho \theta \left(\frac{u_{i+1,j+1}^{n+1} - u_{i-1,j+1}^{n+1}}{4hl} + \frac{u_{i-1,j-1}^{n+1} - u_{i+1,j-1}^{n+1}}{4hl} \right) - \Delta t r \theta \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{2h} \right. \\
& \left. + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{2l} \right) + \Delta t k \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} \theta \operatorname{sgn}(e^y (u_{xx}^n - u_x^n) + \varphi u_{xy}^n) \left(e^y \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{2h} \right) + \varphi \left(\frac{u_{i+1,j+1}^{n+1} - u_{i-1,j+1}^{n+1}}{4hl} + \frac{u_{i-1,j-1}^{n+1} - u_{i+1,j-1}^{n+1}}{4hl} \right) \right) \\
& + \Delta t k_1 \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} \theta \operatorname{sgn}(e^y u_{xy}^n + \varphi (u_{yy}^n - u_y^n)) \left(e^y \left(\frac{u_{i+1,j+1}^{n+1} - u_{i-1,j+1}^{n+1}}{4hl} + \frac{u_{i-1,j-1}^{n+1} - u_{i+1,j-1}^{n+1}}{4hl} \right) \right. \\
& \left. + \varphi \left(\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{l^2} - \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{2l} \right) \right) = u_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2} e^{2y} (1 - \theta) \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h^2} \right. \\
& \left. - \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h} \right) + \frac{\Delta t}{2} \varphi^2 (1 - \theta) \left(\frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{l^2} - \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2l} \right) + \Delta t \varphi e^y \rho (1 - \theta) \\
& \times \left(\frac{u_{i+1,j+1}^n - u_{i-1,j+1}^n}{4hl} + \frac{u_{i-1,j-1}^n - u_{i+1,j-1}^n}{4hl} \right) + \Delta t r (1 - \theta) \left(\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2l} + \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h} \right) \\
& - \Delta t r u_{i,j}^n - \Delta t k \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} (1 - \theta) \operatorname{sgn}(e^y (u_{xx}^n - u_x^n) + \varphi u_{xy}^n) \left(e^y \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h^2} - \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h} \right) \right. \\
& \left. + \varphi \left(\frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{l^2} - \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2l} \right) \right) - \Delta t k_1 \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} (1 - \theta) \operatorname{sgn}(e^y u_{xy}^n + \varphi (u_{yy}^n - u_y^n)) \\
& \times \left(e^y \left(\frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{l^2} - \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2l} \right) + \varphi \left(\frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{l^2} - \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2l} \right) \right).
\end{aligned}$$

Definimos

$$\lambda_1 = \frac{e^y}{h}, \quad \lambda_2 = \frac{\varphi}{l},$$

e

$$c_1^n = k \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} \operatorname{sgn}(e^y (u_{xx}^n - u_x^n) + \varphi u_{xy}^n),$$

$$c_2^n = k_1 \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} \operatorname{sgn}(e^y u_{xy}^n + \varphi (u_{yy}^n - u_y^n)),$$

com c_1^n e c_2^n a serem atualizados a cada passo temporal.

Desse modo, conseguimos simplificar a equação anterior, e temos

$$\begin{aligned}
& u_{i-1,j}^{n+1} \left(\theta \Delta t \left(-\frac{\lambda_1^2}{2} - \frac{\lambda_1 e^y}{4} + \frac{r}{2h} + c_1^n \frac{\lambda_1}{h} + c_1^n \frac{\lambda_1}{2} \right) \right) \\
& + u_{i,j-1}^{n+1} \left(\theta \Delta t \left(-\frac{\lambda_2^2}{2} - \frac{\lambda_2 \varphi}{4} + \frac{r}{2l} + c_2^n \frac{\lambda_2}{l} + c_2^n \frac{\lambda_2}{2} \right) \right) \\
& + u_{i-1,j-1}^{n+1} \left(\theta \Delta t \left(-\frac{\lambda_1 \lambda_2 \rho}{4} + c_1^n \frac{\lambda_2}{4h} + c_2^n \frac{\lambda_1}{4l} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +u_{i,j}^{n+1} \left(1 + \theta \Delta t \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - c_1^n \frac{2\lambda_1}{h} - c_2^n \frac{2\lambda_2}{l} \right) \right) \\
& +u_{i+1,j-1}^{n+1} \left(\theta \Delta t \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2 \rho}{4} - c_1^n \frac{\lambda_2}{4h} - c_2^n \frac{\lambda_1}{4l} \right) \right) \\
& +u_{i-1,j+1}^{n+1} \left(\theta \Delta t \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2 \rho}{4} - c_1^n \frac{\lambda_2}{4h} - c_2^n \frac{\lambda_1}{4l} \right) \right) \\
& +u_{i+1,j}^{n+1} \left(\theta \Delta t \left(-\frac{\lambda_1^2}{2} + \frac{\lambda_1 e^y}{4} - \frac{r}{2h} + c_1^n \frac{\lambda_1}{h} - c_1^n \frac{\lambda_1}{2} \right) \right) \\
& +u_{i,j+1}^{n+1} \left(\theta \Delta t \left(-\frac{\lambda_2^2}{2} + \frac{\lambda_2 \varphi}{4} - \frac{r}{2l} + c_2^n \frac{\lambda_2}{l} - c_2^n \frac{\lambda_2}{2} \right) \right) \\
& +u_{i+1,j+1}^{n+1} \left(\theta \Delta t \left(-\frac{\lambda_1 \lambda_2 \rho}{4} + c_1^n \frac{\lambda_2}{4h} + c_2^n \frac{\lambda_1}{4l} \right) \right) \\
& = u_{i-1,j}^n \left((1-\theta) \Delta t \left(\frac{\lambda_1^2}{2} + \frac{\lambda_1 e^y}{4} - \frac{r}{2h} - c_1^n \frac{\lambda_1}{h} - c_1^n \frac{\lambda_1}{2} \right) \right) \\
& +u_{i,j-1}^n \left((1-\theta) \Delta t \left(\frac{\lambda_2^2}{2} + \frac{\lambda_2 \varphi}{4} - \frac{r}{2l} - c_2^n \frac{\lambda_2}{l} - c_2^n \frac{\lambda_2}{2} \right) \right) \\
& +u_{i-1,j-1}^n \left((1-\theta) \Delta t \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2 \rho}{4} - c_1^n \frac{\lambda_2}{4h} - c_2^n \frac{\lambda_1}{4l} \right) \right) \\
& +u_{i,j}^n \left(1 + (1-\theta) \Delta t \left(-\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + c_1^n \frac{2\lambda_1}{h} + c_2^n \frac{2\lambda_2}{l} \right) \right) \\
& +u_{i+1,j-1}^n \left((1-\theta) \Delta t \left(-\frac{\lambda_1 \lambda_2 \rho}{4} + c_1^n \frac{\lambda_2}{4h} + c_2^n \frac{\lambda_1}{4l} \right) \right) \\
& +u_{i-1,j+1}^n \left((1-\theta) \Delta t \left(-\frac{\lambda_1 \lambda_2 \rho}{4} + c_1^n \frac{\lambda_2}{4h} + c_2^n \frac{\lambda_1}{4l} \right) \right) \\
& +u_{i+1,j}^n \left((1-\theta) \Delta t \left(\frac{\lambda_1^2}{2} - \frac{\lambda_1 e^y}{4} + \frac{r}{2h} - c_1^n \frac{\lambda_1}{h} + c_1^n \frac{\lambda_1}{2} \right) \right) \\
& +u_{i,j+1}^n \left((1-\theta) \Delta t \left(\frac{\lambda_2^2}{2} - \frac{\lambda_2 \varphi}{4} + \frac{r}{2l} - c_2^n \frac{\lambda_2}{l} + c_2^n \frac{\lambda_2}{2} \right) \right) \\
& +u_{i+1,j+1}^n \left((1-\theta) \Delta t \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2 \rho}{4} - c_1^n \frac{\lambda_2}{4h} - c_2^n \frac{\lambda_1}{4l} \right) \right).
\end{aligned}$$

Por último definimos a condição inicial e as condições de fronteira. Como condição inicial, para uma opção call temos

$$u(x, y, 0) = \max(e^x - K, 0),$$

e para uma opção put Europeia

$$u(x, y, 0) = \max(K - e^x, 0),$$

onde K é o preço de exercício da opção.

Como condições de fronteira temos, para uma opção call

$$u(x_{\min}, y, \tau) = 0, \quad u(x_{\max}, y, \tau) = e^{x_{\max}} - K \exp(-r\tau),$$

$$u(x, y_{\min}, \tau) = u(x, y_{\max}, \tau) = e^x - K \exp(-r\tau),$$

e para uma opção put

$$u(x_{\min}, y, \tau) = K \exp(-r\tau) - e^{x_{\min}}, \quad u(x_{\max}, y, \tau) = 0,$$

$$u(x, y_{\min}, \tau) = u(x, y_{\max}, \tau) = K \exp(-r\tau) - e^x.$$

Capítulo 4

Resultados numéricos

Neste capítulo vamos apresentar as soluções do modelo com e sem custos de transação. Para isso implementaram-se métodos numéricos em MATLAB referentes ao modelo de Black-Scholes e ao modelo com custos de transação descritos na secção 3.1.

4.1 Modelo de Black-Scholes

Relembramos que o modelo que estamos a considerar consiste na equação de derivadas parciais

$$u_\tau - \frac{1}{2}\sigma^2(u_{xx} - u_x) - ru_x + ru = f(x, t).$$

Para testar o método numérico, ou seja, verificar que está bem implementado consideramos um problema teste.

O domínio considerado é definido por $x \in [0, 1]$ e $t \in [0, 1]$. A condição inicial é dada por

$$u(x, 0) = x^4,$$

e o termo

$$f(x, t) = e^{-t}x^2(-x^2 - 6\sigma^2 + 2\sigma^2x - 4rx + rx^2),$$

com as condições de fronteira

$$u(x_{\min}, t) = 0, \quad u(x_{\max}, t) = e^{-t}.$$

A solução exata deste problema teste é dada por

$$u(x, t) = e^{-t}x^4,$$

ou mais concretamente, em $t = T$, é dada por

$$u(x, T) = e^{-T}x^4.$$

Escolhendo os valores $r = 0.25$, $\sigma = 0.6$ e $\theta = 0.7$, o resultado obtido é

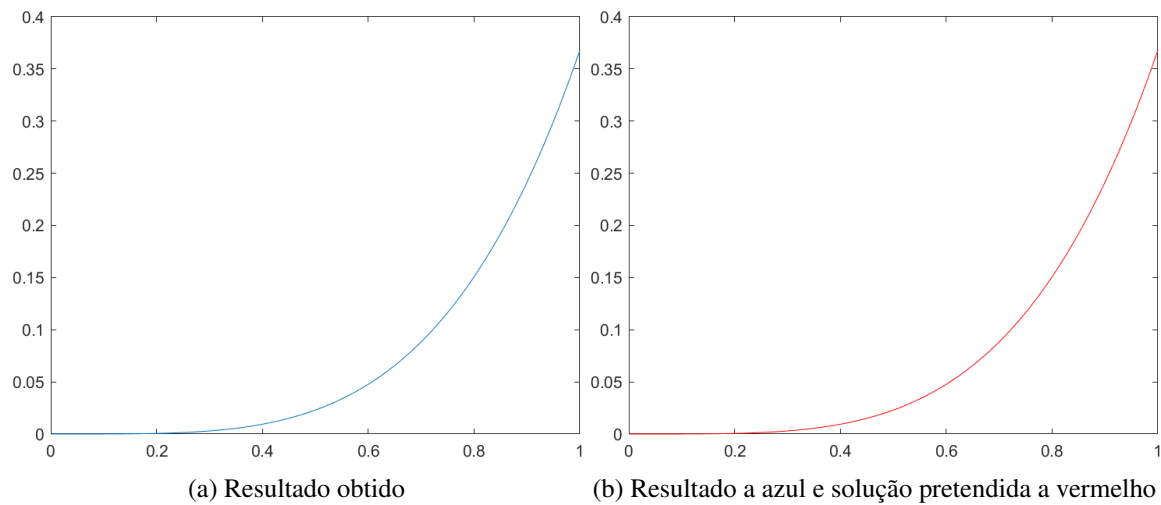


Fig. 4.1 Teste para modelo de Black-Scholes

Como podemos ver na figura 4.1b, o resultado obtido sobrepõe-se por completo à solução pretendida, com o método a mostrar ser estável. Estamos então em condições de aplicar o método numérico à equação de Black-Scholes. Agora

$$f(x, t) = 0,$$

e para uma opção call,

$$u(x, 0) = \max(e^x - K, 0),$$

$$u(x_{\min}, \tau) = 0,$$

$$u(x_{\max}, \tau) = e^{x_{\max}} - K \exp(-r\tau),$$

e para uma opção put,

$$u(x, 0) = \max(K - e^x, 0),$$

$$u(x_{\min}, \tau) = K \exp(-r\tau) - e^{x_{\min}},$$

$$u(x_{\max}, \tau) = 0.$$

Consideramos ainda $x \in [-\infty, \ln(100)]$, o que significa que $S_t \in [0, 100]$. As restantes variáveis são definidas da seguinte forma,

- Preço de exercício $K = 80$
- Maturidade da opção $T = 1$
- Taxa de juro sem risco $r = 0.15$
- Volatilidade $\sigma = 0.25$
- Parâmetro do método $\theta = 0.7$

Os resultados obtidos para opções Europeias encontram-se a seguir,

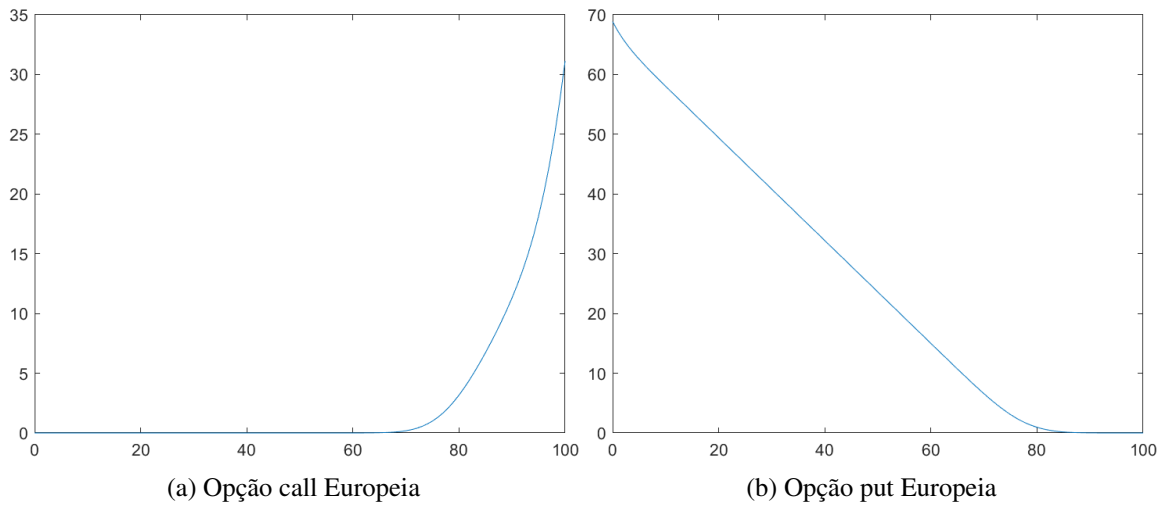


Fig. 4.2 Preço de opções com modelo Black-Scholes

De modo a compararmos o preço de diferentes opções Europeias, fixámos o intervalo de valores do ativo em $S_t \in [0, 100]$, o preço de exercício em $K = 80$, a maturidade da opção em $T = 1$ e o parâmetro $\theta = 0.7$.

Na Tabela 4.1 encontram-se os preços das opções caso no instante inicial o valor do ativo seja igual ao do preço de exercício,

Tabela 4.1 Preços de opções para diferentes valores de σ e r

Preço de opções	$r = 0.05$		$r = 0.1$		$r = 0.15$	
	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.25$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.25$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.25$
Call	1.35	2.25	2.02	2.7	2.75	3.17
Put	0.42	1.86	0.15	1.35	0.04	0.95

4.2 Modelo com custos de transação

Vamos novamente começar por mostrar o teste numérico realizado ao método- θ que aproxima a equação com custos de transação. Assim, queremos testar a equação

$$u_\tau - \frac{1}{2}\sigma^2(u_{xx} - u_x) - ru_x + ru + k\sigma|u_{xx} - u_x|\sqrt{\frac{2}{\pi\Delta t}} = f(x, t).$$

O domínio considerado é $x \in [0, 1]$ e $t \in [0, 1]$. A condição inicial é dada por

$$u(x, 0) = x^4,$$

e o termo fonte

$$f(x,t) = e^{-t} x^2 \left(-x^2 - 6\sigma^2 + 2\sigma^2 x - 4rx + rx^2 + 4k\sigma |3-x| \sqrt{\frac{2}{\pi\Delta t}} \right).$$

As condições de fronteira são definidas por

$$u(x_{\min}, t) = 0, \quad u(x_{\max}, t) = e^{-t}.$$

A solução em $t = T$ é a mesma do teste anterior, ou seja,

$$u(x, T) = e^{-T} x^4.$$

Escolhemos os valores $r = 0.2$, $\sigma = 0.4$, $k = 0.9$ e $\theta = 0.7$, obtivemos o seguinte resultado,

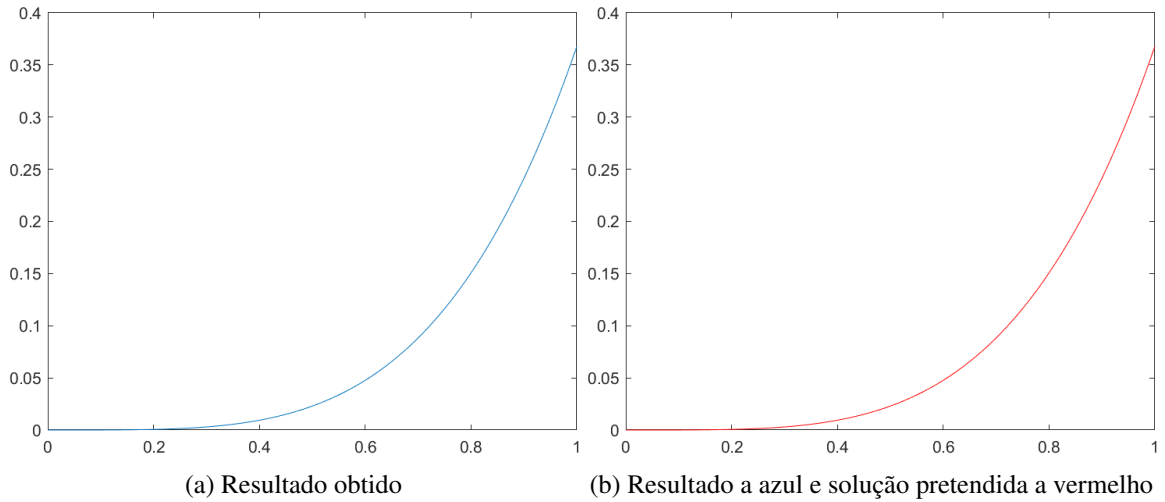


Fig. 4.3 Teste para modelo com custos de transação

Tal como no primeiro modelo, o resultado obtido sobrepõe-se por completo à solução numérica. Podemos então prosseguir para a equação com custos de transação, com as condições iniciais e de fronteiras definidas no capítulo anterior. Novamente, $f(x,t) = 0$ e para uma opção call,

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \max(e^x - K, 0), \\ u(x_{\min}, \tau) &= 0, \\ u(x_{\max}, \tau) &= e^{x_{\max}} - K \exp(-r\tau), \end{aligned}$$

e para uma opção put,

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \max(K - e^x, 0), \\ u(x_{\min}, \tau) &= K \exp(-r\tau) - e^{x_{\min}}, \\ u(x_{\max}, \tau) &= 0. \end{aligned}$$

Com $x \in [-\infty, \ln(100)]$, ou seja, $S_t \in [0, 100]$, temos ainda as variáveis definidas da seguinte forma,

- Preço de exercício $K = 80$
- Maturidade da opção $T = 1$
- Taxa de juro sem risco $r = 0.15$
- Volatilidade $\sigma = 0.25$
- Parâmetro de custo $k = 0.02$
- Parâmetro do método $\theta = 0.7$

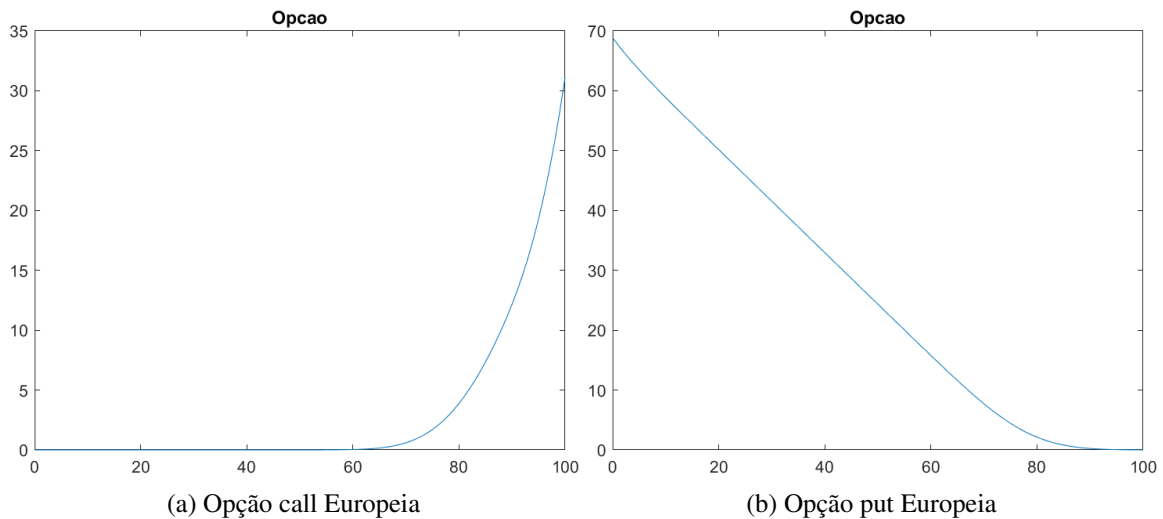


Fig. 4.4 Preço de opções para modelo com custos de transação

Os resultados obtidos encontram-se na figura 4.4. Por último, fixámos o intervalo de valores do ativo em $S_t \in [0, 100]$, o preço de exercício em $K = 80$, a maturidade da opção em $T = 1$, $r = 0.15$ e o parâmetro $\theta = 0.7$.

Tabela 4.2 Preços de opções para diferentes valores de k e σ

Preço de opções	$k = 0$		$k = 0.01$		$k = 0.02$	
	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.25$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.25$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.25$
Call	2.75	3.17	2.98	3.54	3.37	3.89
Put	0.04	0.95	0.32	1.57	0.60	2.13

Pelos resultados obtidos que se encontram na Tabela 4.2, podemos ver que com o parâmetro de custos $k = 0$, os valores obtidos para o preço das opções são os mesmos que para o modelo de Black-Scholes, como seria de esperar. Para os restantes valores, a existência de custos de transação fez com que os preços das opções fossem ligeiramente superiores.

Capítulo 5

Conclusão

O modelo de Black-Scholes foi um modelo de grande importância por ser um dos primeiros que sugeria uma abordagem para avaliar opções Europeias e por isso a um dos seus autores foi atribuído o prémio Nobel de Economia em 1997. No entanto, devido às suas limitações, modelos mais complexos e que consideram outras hipóteses têm sido desenvolvidos de modo a tentar avaliar com uma maior precisão o preço destes instrumentos financeiros.

Depois de ter apresentado e deduzido as equações para três modelos, desenvolveram-se métodos de diferenças finitas para aproximar soluções destes modelos. Posteriormente foram obtidos os resultados numéricos necessários para um estudo comparativo.

Dos dois métodos implementados, podemos ver que o modelo com custos de transação apresenta resultados diferentes dos do modelo de Black-Scholes, o que mostra que a existência de custos de transação, que estão presentes nos mercados reais, constitui uma parte significativa na avaliação correta de uma opção Europeia.

Por último gostaríamos de ter estudado os resultados numéricos do modelo com custos de transação e volatilidade estocástica, onde se teria analisado a importância de uma volatilidade aleatória em relação a uma volatilidade constante no preço de opções. No entanto a sua implementação não foi possível uma vez que a implementação do modelo com custos de transação e volatilidade estocástica é um modelo bidimensional, que envolve uma abordagem significativamente diferente da que é feita para um modelo unidimensional.

Bibliografia

- [1] Adil Khan, M., Khan, S., Ullah, I., Ali Khan, K., and Chu, Y.-M. (2021). A novel approach to the Jensen gap through Taylor's theorem. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44(5):3324–3333.
- [2] Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654.
- [3] Boyle, P. P. and Vorst, T. (1992). Option replication in discrete time with transaction costs. *The Journal of Finance*, 47(1):271–293.
- [4] Davis, M. H., Panas, V. G., and Zariphopoulou, T. (1993). European option pricing with transaction costs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 31(2):470–493.
- [5] Evans, L. C. (2006). An introduction to stochastic differential equations. *Lecture Notes, UC Berkeley*.
- [6] Florescu, I., Mariani, M. C., and Sengupta, I. (2014). Option pricing with transaction costs and stochastic volatility. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2014(165):1–19.
- [7] Ghorpade, S. and Limaye, B. V. (2010). *A course in multivariable calculus and analysis*. Springer.
- [8] Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The review of financial studies*, 6(2):327–343.
- [9] Hodges, S. and Neuberger, A. (1989). Optimal replication of contingent claims under transaction costs. *Review Futures Market*, 8:222–239.
- [10] Hull, J. and White, A. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *The Journal of Finance*, 42(2):281–300.
- [11] Leland, H. E. (1985). Option pricing and replication with transactions costs. *The Journal of Finance*, 40(5):1283–1301.
- [12] Mariani, M. C., SenGupta, I., and Bezdek, P. (2012). Numerical solutions for option pricing models including transaction costs and stochastic volatility. *Acta applicandae mathematicae*, 118(1):203–220.
- [13] Morton, K. W. and Mayers, D. F. (2005). *Numerical solution of partial differential equations: an introduction*. Cambridge university press.
- [14] Seydel, R. and Seydel, R. (2006). *Tools for computational finance*. Springer.
- [15] Soner, H. M., Shreve, S. E., and Cvitanic, J. (1995). There is no nontrivial hedging portfolio for option pricing with transaction costs. *The Annals of Applied Probability*, 5(2):327–355.
- [16] Tian, Y. and Zhang, H. (2020). European option pricing under stochastic volatility jump-diffusion models with transaction cost. *Computers & Mathematics with Applications*, 79(9):2722–2741.

- [17] Wiggins, J. B. (1987). Option values under stochastic volatility: Theory and empirical estimates. *Journal of financial economics*, 19(2):351–372.
- [18] Wilmott, P., Hoggard, T., and Whalley, A. E. (1994). Hedging option portfolios in the presence of transaction costs. *Advances in Futures and Options Research*, 7.